

# Proyecto de investigación

Víctor Manuel Jiménez Morales



# Índice general

<b>1</b>	<b>Groupoids and symmetries</b>	<b>1</b>
1.1	Estructura y líneas de investigación . . . . .	2
1.2	Marco teórico . . . . .	5
1.2.1	Distribuciones y foliaciones . . . . .	5
1.2.2	Grupoides y Distribuciones diferenciables . . . . .	9
1.3	Distribución característica . . . . .	12
1.4	Línea 1 de investigación (Lin. 1.) . . . . .	14
1.4.1	Marco teórico específico de la línea . . . . .	15
1.4.2	Objetivos . . . . .	24
1.5	Línea 2 de investigación (Lin. 2.) . . . . .	26
1.5.1	Marco teórico específico de la línea . . . . .	27
1.5.2	Objetivos . . . . .	30
1.6	Línea 3 de investigación (Lin. 3.) . . . . .	32
1.6.1	Marco teórico específico de la línea . . . . .	32
1.6.2	Objetivos . . . . .	33
1.7	Línea 4 de investigación (Lin. 4.) . . . . .	34
1.7.1	Objetivos . . . . .	34
1.8	Resumen de objetivos . . . . .	37
1.9	Plan de trabajo y metodología . . . . .	40
1.10	Plan de difusión y comunicación de resultados . . . . .	42
	Bibliografía . . . . .	43



## Capítulo 1

# Proyecto de investigación: *Groupoids and symmetries*

## 1.1. Estructura y líneas de investigación

El presente proyecto de investigación se enmarca en una línea orientada al desarrollo y aplicación de estructuras geométricas abstractas, en particular grupoides y distribuciones diferenciables, como **herramientas fundamentales para la modelización y el análisis de ciertos tipos de “simetrías” en contextos matemáticos y físicos.**

La idea central que articula el proyecto consiste en considerar que muchas estructuras (en general, simetrías) que aparecen de manera natural en distintas áreas de la ciencia pueden entenderse de manera unificada a través de la noción de grupoide que codifica “*transformaciones admisibles*” entre sus elementos, y una distribución que introduce restricciones geométricas o dinámicas sobre dicho sistema. Los grupoides permiten describir simetrías locales y relaciones entre estados que no necesariamente vienen dadas por acciones globales de grupos, mientras que las distribuciones capturan, de forma intrínseca, las limitaciones infinitesimales del sistema considerado.

### Lin.1. Material Geometry

Dentro de este marco general, una primera línea de investigación se centra en la aplicación de estas ideas al ámbito de la mecánica de medios continuos. En este contexto, las estructuras de grupoide y distribución permiten formular un enfoque geométrico para el estudio de materiales cuyas propiedades pueden variar de un punto a otro, es decir, materiales no uniformes. En particular, el concepto de grupoide material surge como una herramienta natural para describir cierto tipo de simetrías internas del material (*isomorfismos materiales*), mientras que las distribuciones asociadas permiten caracterizar las restricciones geométricas que gobiernan su comportamiento.

De este modo, se obtiene un marco matemático que permite generalizar la teoría clásica de la elasticidad a materiales no uniformes. La base matemática de este enfoque se desarrolló en la tesis doctoral del autor de este proyecto ([11, 31]). Las implicaciones de este enfoque abarcan muchas áreas como la física de metamateriales o la biología, donde resulta especialmente relevante en el estudio de procesos de remodelación y adaptación estructural.

Los objetivos asociados a esta línea incluyen la extensión de estos modelos a materiales de mayor complejidad, así como el estudio de su comportamiento dinámico. Asimismo, se pretende profundizar en la conexión entre la teoría abstracta y su aplicación a modelos concretos, con el fin de establecer un puente sólido entre las herramientas geométricas desarrolladas y problemas reales en mecánica de medios continuos.

## Lin.2. Local Symmetries

Una segunda línea de investigación del proyecto se centra en el estudio geométrico del propio concepto de simetría en sistemas hamiltonianos. En mecánica clásica, las simetrías se describen habitualmente mediante acciones globales de grupos de Lie o mediante transformaciones que preservan, de manera global, la estructura geométrica y dinámica del sistema. Sin embargo, en muchos problemas de interés esta perspectiva resulta demasiado restrictiva, ya que las transformaciones relevantes pueden estar definidas solo localmente, o bien poseer un significado geométrico únicamente a nivel infinitesimal o puntual. En este contexto, los grupoides proporcionan el marco natural para tratar de manera unificada estos distintos niveles de invariancia.

Dentro de este enfoque, el proyecto considera diferentes nociones de simetría asociadas a un sistema hamiltoniano, distinguiendo entre simetrías dinámicas y geométricas, así como la combinación de ambas, y sus correspondientes versiones locales y puntuales. Esta distinción permite refinar de manera sustancial la descripción clásica de las simetrías, poniendo de manifiesto que la invariancia de un sistema no siempre debe entenderse en términos globales, sino que puede depender de forma esencial de la estructura local del espacio de fases y, en particular, de la presencia de puntos singulares del campo hamiltoniano. Así, los grupoides de simetrías que surgen en este contexto codifican de forma precisa las transformaciones admisibles entre puntos del espacio de fases, mientras que las distribuciones asociadas permiten capturar su contenido infinitesimal.

Uno de los aspectos más relevantes de esta línea de investigación es que los grupoides de simetrías obtenidos no son, en general, grupoides de Lie. La pérdida de regularidad está íntimamente relacionada con la distribución y naturaleza de las singularidades del sistema, y constituye, por tanto, un fenómeno geométrico intrínseco y no una dificultad meramente técnica. Precisamente por ello, el uso de distribuciones características proporciona la herramienta adecuada para describir la huella infinitesimal de estas estructuras. Este enfoque permite asociar a los grupoides de simetrías ciertas foliaciones singulares del espacio de fases, cuyas hojas agrupan puntos “conectados” por simetrías locales del sistema.

Este marco teórico se desarrollará, por primera vez, en este proyecto. Así, los objetivos asociados a esta línea incluyen, en primer lugar, la caracterización de los distintos grupoides de simetrías que aparecen de manera natural en sistemas hamiltonianos, así como el análisis de sus propiedades geométricas, de transitividad y de diferenciabilidad. En segundo lugar, se pretende estudiar las distribuciones características y las foliaciones que estas inducen, con el fin de obtener una descomposición canónica del espacio de fases en regiones de puntos localmente simétricos. Finalmente, esta perspectiva abre la puerta a procedimientos de reducción geométrica intrínsecamente definidos por el propio sistema, así como a la posible extensión de este marco a otros contextos geométricos, como la geometría de contacto o la geometría multisimpléctica.

### Lin.3. Generalized Manifold Structures

Una tercera línea de investigación del proyecto se centra en la aplicación de la teoría de la distribución característica al grupoide par de una variedad, con el objetivo de desarrollar una estructura diferenciable sobre subconjuntos arbitrarios de la misma que generaliza la estructura misma de variedad. La motivación de esta línea parte del hecho de que, en numerosos contextos geométricos, aparecen subconjuntos que no poseen estructura de variedad en el sentido clásico. En este contexto, la teoría de grupoides y distribuciones proporciona un marco natural para extraer, a partir de un subconjunto dado, la geometría diferencial intrínseca compatible con él.

La idea fundamental consiste en considerar, para un subconjunto  $X$  de una variedad  $M$ , el subgrupoide par  $X \times X$  del grupoide par  $M \times M \rightrightarrows M$ , y asociarle su distribución característica. La foliación singular inducida sobre la base permite entonces descomponer el espacio ambiente en hojas de dimensión variable, de manera que el subconjunto  $X$  queda expresado como unión de hojas. Más aún, esta foliación satisface una propiedad de maximalidad: es la foliación más gruesa del espacio ambiente con respecto a la cual  $X$  puede describirse como unión de hojas. De este modo, la geometría de  $X$  no se introduce de forma externa, sino que viene heredada del espacio ambiente.

Así, el objetivo principal de este enfoque es utilizar la foliación resultante como herramienta para asociar a cada subconjunto  $X$  una estructura local modelada sobre cartas foliadas del espacio ambiente, que conduce a una noción de estructura de variedad generalizada que extiende de manera orgánica la noción clásica de subvariedad. En particular, cuando el subconjunto considerado es una subvariedad embebida, la construcción recupera la estructura diferencial habitual. Con esto, los objetivos de esta línea se focalizan en la formulación precisa de la correspondiente estructura local generalizada. Asimismo, se pretende profundizar en el alcance geométrico de esta construcción como extensión de la teoría clásica de variedades, proporcionando un nuevo lenguaje para el tratamiento diferencial de subconjuntos singulares o irregulares dentro de variedades suaves.

Cabe señalar que este trabajo se inició este mismo curso como base de la tesis doctoral de Paula Alba San Miguel, actualmente estudiante en el programa de doctorado de Ciencias de la UNED, con el autor de este proyecto como director.

### Lin.4. In search of new horizons

Un último “*toque final*” en este proyecto se orienta a la identificación y análisis de nuevos contextos en los que la noción de *simetría no global* emerge de manera natural, y en los que el lenguaje de grupoides y distribuciones puede proporcionar un marco unificado para su tratamiento. La motivación principal reside en el hecho de que, en numerosos sistemas pueden existir transformaciones relevantes que no están definidas globalmente ni actúan de manera uniforme sobre todo el espacio.

En este sentido, se buscará explorar nuevos ámbitos de aplicación de esta idea (más allá de los desarrollados en los puntos anteriores). El poder del desarrollo abstracto que sirve de fundamentos de este proyecto radica, esencialmente, en que todo sistema susceptible de tener simetrías no globales es también un potencial ámbito de aplicación de estos resultados. Entre ellos, cabe destacar la teoría de sistemas con restricciones no-holónomas, donde las direcciones admisibles del movimiento vienen determinadas por distribuciones no integrables; la geometría de sistemas con singularidades, en los que la estructura diferencial del espacio de configuraciones no es la variedad diferenciable usual.

Recurso visual que muestra la estructura y coherencia global del proyecto de investigación.



## 1.2. Marco teórico

En esta sección se expone, de forma breve y lo más divulgativa posible, el marco teórico y los fundamentos que sustentan el presente proyecto de investigación, con el objetivo de delimitar los conceptos y antecedentes esenciales desde los que se orienta el estudio y trabajo en las líneas de investigación definidas.

### 1.2.1. Distribuciones y foliaciones

Todo campo de vectores  $X$  sobre una variedad diferenciable  $M$ , desde un punto de vista intuitivo, se puede interpretarse como una «elección diferenciable» de un vector en cada punto de  $M$ . De esta forma, la noción de *distribución diferenciable* surge como una generalización natural de dicho concepto, de tal manera que en lugar de elegir un único vector se selecciona un subespacio vectorial. De manera específica, una *distribución*  $D$  en una variedad  $M$  es la asignación a cada punto  $x$  de  $M$  de un subespacio vectorial  $D_x$ , denominado *fibra* en  $x$ , del su espacio tangente  $T_x M$ . Si la dimensión de  $D_x$  es constante en todo  $M$ , se dice que la distribución es *regular*; en caso contrario, se denomina *singular*.

Se dice que una distribución  $D$  es *diferenciable* si, para todo punto  $x \in M$  y para cualquier vector  $v_x \in D_x$ , existe un campo vectorial  $X$  definido en un entorno de  $x$ , tal que  $X$  es tangente a la distribución, i.e.  $X(y) \in D_y$  para todo  $y$  en su dominio, y satisface  $X(x) = v_x$ .

Notemos que todo campo de vectores  $X$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es integrable. Es decir, para todo punto  $x \in M$ , existe una única curva  $\gamma$  en  $M$ , llamada *curva integral en  $x$* , tal que

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t.$$

La familia de todas las curvas integrales define el *flujo local* de  $X$ . Un hecho notable es que las imágenes de estas curvas integrales de  $X$  dividen  $M$  en subvariedades de dimensión 1, que se ajustan entre sí de manera ordenada, como *líneas paralelas en el espacio euclidiano* (Teorema fundamental de flujos [38]).

En este contexto, surge naturalmente la siguiente pregunta: *dada una distribución diferenciable  $D$  sobre  $M$ , ¿existe alguna noción análoga a la del flujo para  $D$ ?*

La respuesta a esta pregunta da lugar a la noción de subvariedad integral. Una *subvariedad integral* de  $D$  sobre una variedad  $M$  es una subvariedad conexa inmersa  $N$  de  $M$  tal que, para cada  $y \in N$ , el espacio tangente  $T_y N$  es un subespacio vectorial de  $D_y$ . Se dice que  $N$  es *máxima* si no está contenida en ninguna otra subvariedad integral, y que es de *dimensión máxima* si su espacio tangente en cada punto  $y$  coincide con  $D_y$ .

De este modo, la búsqueda de un concepto análogo al flujo de un campo de vectores conduce a la búsqueda de subvariedades integrales máximas en cada punto de la variedad. Específicamente, se dice que  $D$  es una *distribución integrable* si cada punto de  $M$  está contenido en una subvariedad integral máxima de dimensión máxima.

El estudio de la integrabilidad de las distribuciones es considerablemente más complejo que el de los campos de vectores. Consideremos el caso  $M = \mathbb{R}^3$  y la distribución diferenciable generada, punto a punto, por los campos de vectores

$$\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso, la distribución  $D$  no puede tener ninguna subvariedad integral que contenga al origen. Así, a diferencia de lo que ocurre con los campos de vectores, no toda distribución diferenciable es integrable.

Notemos que una distribución integrable divide la variedad base en subvariedades integrales. Sin embargo, la condición de diferenciable de la distribución tiene como consecuencia que, análogamente a lo que ocurre con campos de vectores, esta

división venga dada por subvariedades «bien colocadas».

**Definición 1.2.1.** Una *foliación*, sobre una variedad diferenciable  $M$  es una partición  $\mathcal{F} := \{\mathcal{F}(x)\}$  de  $M$  en una unión disjunta de subvariedades conexas inmersas  $\mathcal{F}(x)$ , llamadas *hojas*, que satisface la siguiente propiedad local de foliación en cada punto  $x \in M$ : Denotamos la hoja que contiene a  $x$  por  $\mathcal{F}(x)$ , la dimensión de  $\mathcal{F}(x)$  por  $k$ , y la dimensión de  $M$  por  $n$ .

Entonces, existe una carta local de  $M$  con coordenadas  $(y^1, \dots, y^n)$  en un vecindario  $U$  de  $x$ ,  $U := \{-\epsilon < y^1 < \epsilon, \dots, -\epsilon < y^n < \epsilon\}$ , tal que el disco de dimensión  $k$   $\{y^{k+1} = \dots = y^n = 0\}$  coincide con la componente conexas de la intersección de  $\mathcal{F}(x)$  con  $U$  que contiene a  $x$ , y cada disco de dimensión  $k$   $\{y^{k+1} = c_{k+1}, \dots, y^n = c_n\}$ , donde  $c_{k+1}, \dots, c_n$  son constantes, está completamente contenido en alguna hoja de  $\mathcal{F}$ .

Esta carta (local) se llama una *carta foliada* de  $\mathcal{F}$  en  $x$ . Un *atlas de foliación* de dimensión  $k$  es un atlas de  $M$  dado por cartas foliada. La *dimensión* de la foliación  $\mathcal{F}$  es una función  $\dim_{\mathcal{F}} : M \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$  tal que, para cada  $x \in M$ ,  $\dim_{\mathcal{F}}(x)$  es la dimensión de la hoja  $\mathcal{F}(x)$  en  $x$ .

Si todas las hojas de una foliación  $\mathcal{F}$  tienen la misma dimensión  $k$ , entonces se dice que  $\mathcal{F}$  es una *foliación regular* y la dimensión de la foliación se identifica con el número  $k$ . En caso contrario, se dice que la foliación es *singular*.

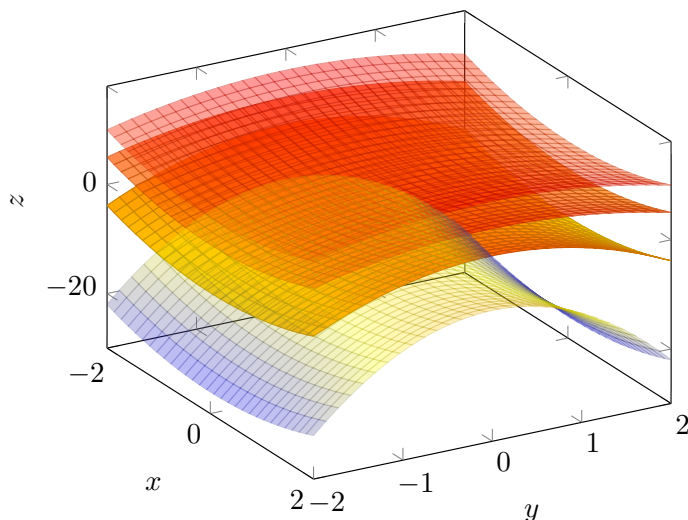


Figura 1.1: Foliación

Sea  $M$  una variedad y  $\mathcal{F}$  una foliación sobre  $M$ . Consideremos una carta foliada de  $M$  en un punto  $x \in M$  con coordenadas  $(y^1, \dots, y^n)$  en un vecindario  $U := \{-\epsilon < y^1 < \epsilon, \dots, -\epsilon < y^n < \epsilon\}$  de  $x$ . Entonces, el subconjunto  $U_0 := \{y^{k+1} = \dots = y^n = 0\}$  de  $U$ , dado por la condición de que las últimas  $n - k$  coordenadas sean 0, es un subconjunto abierto de la hoja  $\mathcal{F}(x)$  (con la topología inducida) que contiene a  $x$ . En efecto, podemos definir una carta local de  $\mathcal{F}(x)$  en  $x$  sobre  $U_0$  restringiendo el mapeo  $(y^1, \dots, y^k)$ , donde  $k$  es la dimensión de  $\mathcal{F}(x)$ , a  $U_0$ . Si  $\mathcal{F}$  es una foliación regular, la restricción del mapeo  $(y^1, \dots, y^k)$  a cada uno de los subconjuntos  $U_{c_1, \dots, c_k} := \{y^{k+1} = c_{k+1}, \dots, y^n = c_n\}$ , con  $c_i$  constante para todo  $i = k+1, \dots, n$ , define una carta local de la hoja en la que  $U_{c_1, \dots, c_k}$  está contenida.

**Ejemplo 1.2.2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, y  $\mathcal{F}$  una foliación sobre  $M$ . Entonces, podemos definir la *distribución tangente asociada a  $\mathcal{F}$* , denotada por  $D^{\mathcal{F}}$ , dada por la siguiente correspondencia:

$$x \in M \mapsto D_x^{\mathcal{F}} = T_x \mathcal{F}(x).$$

Se sigue directamente de la propiedad local de foliación que la distribución tangente es una distribución diferenciable, tal que las hojas de  $\mathcal{F}$  son las variedades integrales máximas de  $D^{\mathcal{F}}$ .  $\diamond$

El primer resultado clásico sobre integrabilidad de distribuciones surge para distribuciones regulares. Una distribución  $D$  se dice *involutiva* si para cualesquiera dos campos de vectores (locales) tangentes a  $D$ ,  $X$  e  $Y$ , se satisface que  $[X, Y]$  es también un campo de vectores tangente a  $D$ .

**Teorema 1.2.3** (Teorema de Frobenius). *Dada una distribución diferenciable regular  $D$  sobre  $M$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i)  $D$  es integrable.
- ii)  $D$  es involutiva.
- iii)  $D$  es la distribución  $D^{\mathcal{F}}$  de una foliación regular  $\mathcal{F}$  de  $M$ .

Lidiar con el problema de distribuciones singulares resulta algo más complicado dado que, en general, el teorema de Frobenius no es cierto para este tipo de distribuciones.

**Ejemplo 1.2.4.** Sea  $C$  una familia de campos vectoriales locales en  $M$  tales que sus dominios cubren  $M$ . Esto da lugar a una distribución singular diferenciable  $D^C$ : para cada punto  $x \in M$ ,  $D_x^C$  es el espacio vectorial generado por los valores en  $x$  de los campos vectoriales de  $C$  cuyos dominios contienen a  $x$ . Decimos que  $D^C$  está generada por  $C$ .  $\diamond$

**Definición 1.2.5.** Una distribución  $D$  se llama *invariante con respecto a una familia de campos vectoriales (locales)  $C$*  si es invariante con respecto a cada elemento de  $C$ , i.e., si  $\Theta \in C$  y  $\varphi_t^{\Theta} : U_t \rightarrow U_{-t}$  denota el flujo local de  $\Theta$ , entonces tenemos

$$T_x \varphi_t^{\Theta} (D_x) = D_{\varphi_t^{\Theta}(x)}, \quad \forall x \in M,$$

siempre que  $\varphi_t^\ominus$  esté definida.

Con esto, el siguiente resultado, debido a Stefan [46] y Sussmann [47], presenta una condición de integrabilidad sobre distribuciones singulares.

**Teorema 1.2.6** (Stefan-Sussman). *Sea  $D$  una distribución singular diferenciable sobre una variedad  $M$ . Entonces, las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

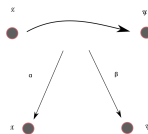
- (a)  $D$  es integrable.
- (b)  $D$  está generada por una familia  $C$  de campos vectoriales y es invariante con respecto a  $C$ .
- (c)  $D$  es la distribución tangente  $D^{\mathcal{F}}$  de una foliación singular diferenciable  $\mathcal{F}$ .

De esta manera se obtiene un teorema análogo al teorema de Frobenius, para distribuciones singulares. Existe otro teorema relacionado con la integrabilidad de distribuciones generalizadas, que a menudo se confunde con el teorema de Stefan-Sussmann: *el teorema de Hermann*. Este establece que cualquier distribución diferenciable involutiva, localmente finitamente generada en una variedad, es integrable. Para una exposición clara y directa de ambos teoremas, nos referimos a [12].

### 1.2.2. Grupoides y Distribuciones diferenciables

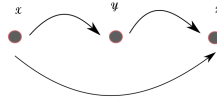
Las categorías fueron introducidas por Eilenberg y MacLane en 1945 [17], mientras que los *grupoides*, que constituyen una clase concreta de categorías, fueron estudiados por Brandt en 1926 [6]. Fue en este trabajo, que trataba la composición de formas cuadráticas en cuatro variables, en el que se les dio nombre por primera vez a estos objetos matemáticos. Desde un punto de vista puramente intuitivo, uno puede pensar en grupoides como un conjunto de «*flechas*», denotado por  $\Omega$ , y un conjunto de «*puntos*», denotado por  $M$ , que satisfacen una serie «*propiedades de compatibilidad*»:

- i) Cada flecha une dos puntos,



siendo  $\alpha$  y  $\beta$  las aplicaciones que devuelven el punto inicial y final de la flecha, respectivamente.

- ii) Existe una *operación parcial* “ $\cdot$ ”, de tal manera que dos flechas se pueden multiplicar si el punto inicial de una es igual al punto final de la otra,



- iii) Cada punto  $X$  tiene al menos una flecha que empieza y acaba en ese punto  $\epsilon(X)$ , llamada *identidad*, y a cada flecha  $g$  le corresponde una flecha inversa  $i(g) = g^{-1}$ ,



de tal manera que se satisfacen las propiedades naturales.

Así, las aplicaciones  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\epsilon$ ,  $i$ , y  $\cdot$  se denominan *aplicaciones de estructura* y las propiedades de interacción de estas aplicaciones definen la estructura de grupoide. El grupoide se denota por  $\Gamma \rightrightarrows M$ . Un *subgrupoide* de  $\Gamma \rightrightarrows M$  es un grupoide  $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \bar{M}$  tal que  $\bar{\Gamma} \subseteq \Gamma$ ,  $\bar{M} \subseteq M$  y las aplicaciones de estructura de  $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \bar{M}$  se pueden entender como las respectivas restricciones de las aplicaciones de estructura de  $\Gamma \rightrightarrows M$ .

Una definición compacta, rigurosa y elegante es aquella que describe los grupoides como una categoría «pequeña» en la que todo morfismo es un isomorfismo. Así, resulta natural definir un morfismo de grupoides como un functor y, con esto, se construye toda la categoría de grupoides de una manera muy natural.

Si  $G$  es un grupo, podemos construir un grupoide tal que el conjunto de morfismos es  $G$ , el conjunto de objetos es  $\{e\}$  (donde  $e$  es el elemento neutro de  $G$ ) y la composición viene dada por la operación de grupo. Por lo tanto, todo grupo se puede ver como un caso particular de grupoide, en el que la multiplicación está globalmente definida.

Los grupoides se utilizan actualmente en diferentes áreas matemáticas, tales como Teoría de Grupos, Topología Algebraica, Geometría Diferencial, o Teoría de Homotopía. Para un conocimiento amplio de los usos que se le dan a estos objetos en matemáticas puede verse [7] y las referencias incluidas en él.

La noción de *grupoide de Lie* fue introducida por Ehresmann en una serie de artículos [13–16] en los que añadía estructuras topológicas y diferenciables a los grupoides con el fin de usarlos como herramientas en Geometría Diferencial en particular en teoría de fibrados y conexiones. Pradines redefinió el concepto de grupoide de Lie en [43].

**Definición 1.2.7.** Un *grupoide de Lie* es un grupoide  $\Gamma \rightrightarrows M$  tal que  $\Gamma$  y  $M$  son variedades diferenciables y las aplicaciones de estructura  $(\alpha, \beta, \epsilon, i$  y  $\cdot)$  son diferenciables. Además,  $\alpha$  y  $\beta$  son submersiones.

Un *subgrupoide de Lie* de  $\Gamma \rightrightarrows M$  es un grupoide de Lie  $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \bar{M}$  tal que es un subgrupoide de  $\Gamma$  cumpliendo que  $\bar{\Gamma}$  y  $\bar{M}$  son subvariedades de  $\Gamma$  y  $M$ , respectivamente.

Así, un grupoide de Lie será un grupoide junto con estructuras diferenciables que hacen del conjunto de morfismos y del conjunto de objetos variedades diferenciables tales que las aplicaciones de estructura son diferenciables. Además, por razones técnicas, se impone que  $\alpha$  y  $\beta$  sean submersiones sobreyectivas.

De manera natural se define un morfismo entre grupoides de Lie como un morfismo entre grupoides que es diferenciable. De este modo, se construye también la categoría de grupoides de Lie como subcategoría de la categoría de grupoides. Notemos que, como cabría esperar, todo grupo de Lie se puede ver como un grupoide de Lie. El concepto de grupoide de Lie ha variado desde sus comienzos. Así en [39] se diferenciaba entre grupoide diferenciable y grupoide de Lie, indicando que este último era un grupoide diferenciable localmente trivial. No obstante, a partir de [3] se ha optado por no distinguir entre grupoides diferenciables y grupoides de Lie, a diferencia de como se venía haciendo hasta el momento. K. Mackenzie sigue este convenio desde [40].

Un ejemplo interesante para este proyecto es el llamado grupoide de 1-jets de difeomorfismos locales sobre una variedad diferenciable  $M$ , denotado por  $\Pi^1(M, M)$ , junto con la composición de 1-jets. Los elementos de  $\Pi^1(M, M)$  se denotarán como  $j_{x,y}^1\phi$ , que representa al 1-jet de un difeomorfismo local de  $M$  en  $M$ ,  $\phi$ , y  $\phi(X) = Y$ .

En general, si  $\Gamma \rightrightarrows M$  un grupoide de Lie con conjunto de morfismos  $\Gamma$  y conjunto de objetos  $M$ , para todo objeto  $x \in M$ , el conjunto de morfismos con dominio y codominio  $x$ ,  $\Gamma_x^x$ , se denomina *grupo de isotropía en  $x$*  y el conjunto de objetos  $\mathcal{O}(x)$  dado por la imagen por  $\beta$  de los morfismos con cuya imagen por  $\alpha$  es  $x$  se denomina *órbita de  $x$* . La estructura de grupoide de Lie dota a las órbitas de estructura de variedad diferenciable y a los grupos de isotropía de estructura de grupo de Lie.

*Los conceptos de grupoide y grupoide de Lie cobran un gran protagonismo en el desarrollo de la línea de investigación de este proyecto.* De hecho, uno de los resultados más importantes de esta investigación, cuya aplicación es la motivación principal del proyecto, se basa en la búsqueda de cierta estructura diferenciable sobre un subgrupoide cualquiera de un grupoide de Lie.

### 1.3. Distribución característica

La distribución característica surge inicialmente con objeto de lidiar con una situación específica en el marco de la primera línea de investigación (**Lin. 1.**): el grupoide que codifica todas las simetrías materiales no tiene, generalmente, estructura de grupoide de Lie. Así, se presenta el siguiente problema, más general, que será relevante no solo por sus aplicaciones en la Mecánica de Medios Continuos, sino también en el resto de líneas de investigación (el desarrollo de esta sección se puede estudiar en detalle en [11, 31]).

La situación a tratar en esta sección es la siguiente: *Se considera  $\bar{\Gamma} \subseteq \Gamma$  un subgrupoide de un grupoide de Lie  $\Gamma \rightrightarrows M$ , de tal manera que no se asume ninguna estructura diferenciable sobre  $\bar{\Gamma}$ .*

Denotaremos por  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\epsilon}$  y  $\bar{i}$  las restricciones de las aplicaciones estructura  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\epsilon$  e  $i$  de  $\Gamma$  a  $\bar{\Gamma}$  (véase el diagrama a continuación).

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\Gamma} & \xrightarrow{j} & \Gamma \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & M
 \end{array}$$

donde  $j$  es la inclusión. Con esto, podemos construir una distribución  $A\bar{\Gamma}^T$  sobre la variedad  $\Gamma$  de la siguiente manera,

$$g \in \Gamma \mapsto A\bar{\Gamma}_g^T \leq T_g\Gamma,$$

tal que  $A\bar{\Gamma}_g^T$  es la fibra de  $A\bar{\Gamma}^T$  en  $g$  generada por los campos vectoriales (locales) invariantes a izquierda  $\Theta \in \mathfrak{X}_{loc}(\Gamma)$  cuyo flujo en las identidades está totalmente contenido en  $\bar{\Gamma}$ , es decir:

- (i)  $\Theta$  es tangente a las fibras de  $\beta$ ,

$$\Theta(g) \in T_g\beta^{-1}(\beta(g)),$$

para todo  $g$  en el dominio de  $\Theta$ .

- (ii)  $\Theta$  es invariante por traslaciones a izquierda,

$$\Theta(g) = T_{\epsilon(\alpha(g))}L_g(\Theta(\epsilon(\alpha(g)))) ,$$

para cualquier  $g$  en el dominio de  $\Theta$ .

(iii) El flujo (local)  $\varphi_t^\Theta$  de  $\Theta$  satisface

$$\varphi_t^\Theta(\epsilon(x)) \in \bar{\Gamma},$$

para todo  $x \in M$  de tal manera que  $\Theta$  está definido  $\epsilon(x)$ .

Nótese que, para cada  $g \in \Gamma$ , el vector cero  $0_g \in T_g\Gamma$  está contenido en la fibra de la distribución en  $g$ , es decir, en  $A\bar{\Gamma}_g^T$ . Por otro lado, es fácil probar que un campo vectorial  $\Theta$  satisface las condiciones (i) y (ii) si, y solo si, su flujo local  $\varphi_t^\Theta$  es invariante a izquierda. Entonces, dado que  $\bar{\Gamma}$  es un subgrupoide de  $\Gamma$ , la condición (iii) es equivalente a la siguiente:

(iii)' El flujo (local)  $\varphi_t^\Theta$  de  $\Theta$  en  $\bar{g}$  está totalmente contenido en  $\bar{\Gamma}$ , para todo  $\bar{g} \in \bar{\Gamma}$ .

Por lo tanto, *estamos tomando los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre  $\Gamma$  cuyas curvas integrales están confinadas dentro o fuera de  $\bar{\Gamma}$* . También es destacable que, por definición, esta distribución es diferenciable.

La distribución  $A\bar{\Gamma}^T$  se denomina la *distribución característica de  $\bar{\Gamma}$* . Por simplicidad, denotaremos la familia de los campos vectoriales que satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) por  $\mathcal{C}$ . Los campos vectoriales locales de  $\mathcal{C}$  se llamarán *campos vectoriales admisibles*.

La estructura de grupoide nos permite construir dos nuevos objetos asociados a la distribución  $A\bar{\Gamma}^T$ . El primero es una distribución diferenciable sobre la base  $M$ , denotada por  $A\bar{\Gamma}^\sharp$ . El segundo es una correspondencia “diferenciable”  $A\bar{\Gamma}$  que asocia a cada punto  $x$  de  $M$  un subespacio vectorial de  $T_{\epsilon(x)}\Gamma$ . Ambas construcciones se caracterizan por la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{A\bar{\Gamma}^T} & \mathcal{P}(T\Gamma) \\
 \uparrow \epsilon & \nearrow A\bar{\Gamma} & \downarrow T\alpha \\
 M & \xrightarrow{A\bar{\Gamma}^\sharp} & \mathcal{P}(TM)
 \end{array}$$

donde  $\mathcal{P}(E)$  es la colección de subconjuntos de  $E$ . La distribución  $A\bar{\Gamma}^\sharp$  se llama *distribución base-característica de  $\bar{\Gamma}$* . Es importante destacar que ninguna de las distribuciones introducidas son, necesariamente, regulares.

Consideremos un campo vectorial invariante a izquierda  $\Theta$  sobre  $\Gamma$  cuyo flujo (local)  $\varphi_t^\Theta$  en las identidades está contenido en  $\bar{\Gamma}$ . Sea  $v_g = \Xi(g) \in A\bar{\Gamma}_g^T$  con  $\Xi \in \mathcal{C}$ .

Entonces,

$$T_g \varphi_t^\ominus(v_g) = \Upsilon(\varphi_t^\ominus(g)),$$

donde  $\varphi_s^\Xi$  es el flujo de  $\Xi$ , y  $\Upsilon$  es el campo de vectores sobre  $\Gamma$  dado por el pullback de  $\Xi$  por  $\varphi_t^\ominus$ .

Así, la distribución característica  $A\bar{\Gamma}^T$  está generada localmente por una familia de campos vectoriales  $\mathbb{C}$  y es invariante con respecto a esta familia. Por lo tanto, en base al teorema 1.2.6  $A\bar{\Gamma}^T$  es una distribución integrable. Análogamente, se tiene que la distribución  $A\bar{\Gamma}^\sharp$  es también integrable.

Como consecuencia se generan dos foliaciones,  $\bar{\mathcal{F}}$  sobre  $\Gamma$  y  $\mathcal{F}$  sobre  $M$ . Entre los resultados obtenidos del estudio de estas distribuciones y sus respectivas foliaciones, se destacan los siguientes:

**Teorema** Sea  $\Gamma \rightrightarrows M$  un grupoide de Lie y  $\bar{\Gamma}$  un subgrupoide de  $\Gamma$  (no necesariamente un grupoide de Lie) sobre  $M$ . Entonces, existen una foliación maximal  $\bar{\mathcal{F}}$  de  $\Gamma$  y una foliación maximal  $\mathcal{F}$  de  $M$  tales que:

i) Para todo  $x \in M$ ,

$$\alpha(\bar{\mathcal{F}}(x)) = \mathcal{F}(x).$$

ii)  $\bar{\Gamma}$  es una unión de hojas de  $\bar{\mathcal{F}}$ .

iii) Para todo  $x \in M$ , existe un subgrupoide de Lie transitivo  $\bar{\Gamma}(\mathcal{F}(x))$  de  $\Gamma$  con base  $\mathcal{F}(x)$ .

Así, aunque nuestro grupoide  $\bar{\Gamma}$  no es un subgrupoide de Lie de  $\Gamma$ , aún podemos separarlo en variedades (hojas de la foliación  $\bar{\mathcal{F}}$ ) y extraer componentes “transitivas” y “diferenciables” (los grupoides de Lie  $\bar{\Gamma}(\mathcal{F}(x)) \rightrightarrows \mathcal{F}(x)$ ). En otras palabras, desde un punto de vista intuitivo, estas distribuciones nos permiten demostrar que  $\bar{\Gamma}$  puede ser dividido de una única y maximal manera en «trozos» diferenciables y transitivos.

*Es esta intuición la que da inicio a las líneas de investigación presentadas en este proyecto.*

## 1.4. Línea 1 de investigación (Lin. 1.)

La presente línea de investigación es la que más recorrido tiene en este punto y supone, además, la prueba palpable de lo fructífero que puede resultar el uso de los avances puramente matemáticos sobre la distribución característica en otros campos de investigación. En este caso, la línea de investigación propuesta aborda una serie de desafíos fundamentales que se pueden resumir en los siguientes: El desarrollo de un marco matemático general que sea aplicable a **materiales no uniformes** basado en grupoides y distribuciones diferenciables y su aplicación a diferentes

facetas y modelos en mecánica de medios continuos.

Cabe destacar que como resultado de esta línea de investigación se han publicado ya 10 artículos de investigación [23, 27–35], y un libro de investigación [11], publicado en World Scientific, que *sienta las bases de este nuevo enfoque en el tratamiento de materiales no uniformes*.

### 1.4.1. Marco teórico específico de la línea

Establecemos en esta sección, de manera muy resumida, el marco teórico y los avances realizados en esta línea de investigación.

## Mecánica de Medios Continuos

Desde sus orígenes, la teoría de la elasticidad ha constituido una rama rica y emocionante de la investigación matemática. Esta disciplina fue inicialmente desarrollada por J. Bernoulli, A. L. Cauchy y L. Euler, y a lo largo del tiempo ha contado con importantes contribuciones de matemáticos como Beltrami, Birkhoff, Hadamard, Lipschitz, entre otros. Sin embargo, con el transcurso de los años, la relevancia de la elasticidad como rama de las matemáticas fue disminuyendo. Aunque persistieron algunas excepciones, en términos generales, los matemáticos comenzaron a perder interés en este campo (véase [52]).

En 1954, la tesis de W. Noll titulada “*On the Continuity of the Solid and Fluid States*” [41] dio un nuevo empuje a esta teoría como rama de aplicación de la matemática abstracta. En este trabajo, Noll comenzó a utilizar el concepto de *punto material* o *partícula material*, inaugurando una nueva fase que podría denominarse *nueva elasticidad racional*, la cual constituye la base física de este proyecto. Así, un *continuo* o *cuerpo material* se modela físicamente como una variedad conexa tridimensional  $\mathcal{B}$ . Generalmente se impone que el cuerpo material puede ser embebido en el espacio físico  $S$  que usualmente se identifica con  $\mathbb{R}^3$  o, dicho de otra manera,  $\mathcal{B}$  posee una carta global. Obsérvese que un cuerpo material es, por definición, un espacio topológico abstracto. Así, esta imposición se traduce en que se puede representar el cuerpo como parte del mundo físico; este tipo de «representaciones» se denominan *configuraciones*. Específicamente, una *configuración*  $\phi$  es una aplicación que embebe  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Normalmente fijamos una configuración  $\phi_0$ , llamada *configuración de referencia*. De este modo, una *deformación* se describe como un cambio de configuraciones, a saber, la composición  $\kappa = \phi \circ \phi_0^{-1}$  (figura 1.2).

En una formulación más abstracta [44], muchas de las limitaciones de la teoría, como la estructura métrica del espacio, pueden ser eliminadas sin comprometer su contenido físico. De hecho, en [44] surge una teoría rigurosa al imitar el enfoque geométrico de la Mecánica Clásica, definiendo el espacio de configuraciones como el espacio de aplicaciones que embeben el cuerpo en el espacio físico.

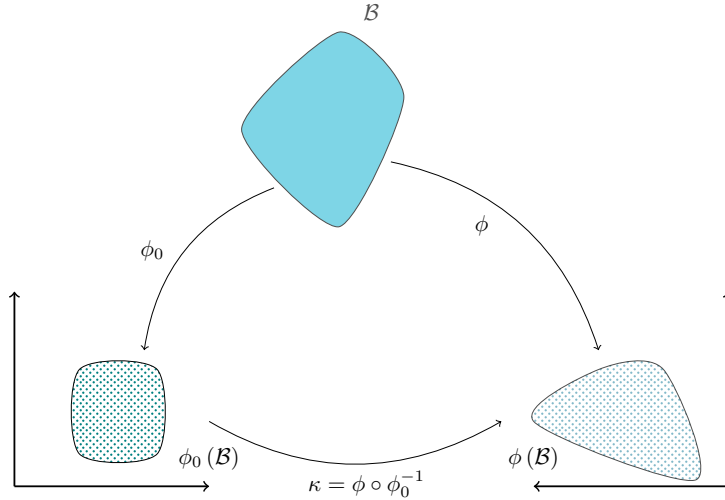


Figura 1.2: Deformación

Este espacio de configuraciones posee una estructura (no única) de variedad diferenciable infinita-dimensional [26, 37]. Existen, además, otros enfoques sobre los campos elásticos asociados a ciertos tipos de defectos aislados (*dislocaciones* y *disclinaciones*) [4, 36, 50]. No obstante, la primera línea de investigación (**Lin. 1.**) de este proyecto supone una interacción entre el enfoque de W. Noll sobre la **Mecánica de Medios Continuos** [42] y la **Geometría Diferencial**, con un foco especial en la **teoría de distribuciones diferenciables, foliaciones, y grupoides**. Como se puede observar en textos modernos como *Introduction to Rational Elasticity* de C. C. Wang y C. Truesdell, y *Mathematical Foundations of Elasticity* de J. E. Marsden y T. J. R. Hughes, esta relación ha dado lugar a una teoría rica en resultados interesantes. Aunque los diferentes enfoques utilizan estructuras geométricas similares, el estatus conceptual de la teoría es distinto. El enfoque de Noll se basa en la existencia de *leyes constitutivas* que codifican toda la información sobre la respuesta del material. Esto permite comparar puntos materiales a través de los llamados *isomorfismos materiales* (noción que discutiremos más adelante). Aunque algunos de los resultados obtenidos por esta escuela coinciden con los de sus predecesores, también se encuentran diferencias importantes. Un ejemplo notable es el papel fundamental de los *grupos de simetría material* en la teoría de Noll.

Una *ley constitutiva* o *respuesta material* (tales como el *esfuerzo de Cauchy* o la *energía elástica por unidad de masa*), se presenta como una función diferenciable  $W$ . El modelo que sirve de base en esta línea de investigación, es el de los *materiales elásticos simples*. Estos se caracterizan por el hecho de que su respuesta material

depende, en cada partícula material, de la deformación en la partícula a través únicamente de la primera derivada de la deformación en ese punto. De este modo, la respuesta mecánica se representa matemáticamente como una aplicación diferenciable  $W : \mathcal{B} \times Gl(3, \mathbb{R}) \rightarrow V$ , donde  $Gl(3, \mathbb{R})$  es el grupo lineal general de matrices regulares  $3 \times 3$ . En general,  $V$  será el espacio de todos los *tensores de esfuerzos*. De hecho, las fuerzas de contacto en una partícula material, en una configuración dada  $\phi$ , se caracterizan por un tensor simétrico de segundo orden  $T_{X,\phi}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, la respuesta mecánica viene dada por la ecuación,

$$W(X, F) = T_{X,\phi},$$

donde  $F$  es la matriz asociada al 1-jet en  $\phi_0(X)$  de  $\phi \circ \phi_0^{-1}$ . Nótese que la forma de  $W$  depende de la elección de una configuración de referencia particular  $\phi_0$  para expresar el gradiente de las deformaciones. Sin embargo, la ley de cambio de configuraciones nos permiten entender la respuesta mecánica como una aplicación diferenciable que no depende de la configuración de referencia elegida [11, 52].

Con esto, para materiales simples, a través de la matriz asociada de sus trivializaciones por la configuración de referencia, la respuesta mecánica puede definirse de manera equivalente como una aplicación diferenciable cuyo dominio es la variedad diferenciable de 1-jets de difeomorfismos locales del material  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ , y como codominio el espacio vectorial  $V$ . Una de las primeras consecuencias de definir una respuesta material es que esta nos permite «comparar puntos materiales». De hecho, se dice que dos partículas materiales  $X$  e  $Y$  «están hechas del mismo material» si las propiedades elásticas son las mismas o, equivalentemente, las respuestas mecánicas en cada uno de los puntos son iguales respecto, quizá, configuraciones de referencia diferentes. De aquí surge, precisamente, la mencionada noción de isomorfismo material que caracteriza esta condición:  $X$  e  $Y$  están hechas del mismo material si, y solo si existe un difeomorfismo local  $\phi$  de una partícula material a la otra, de tal manera su 1-jet  $P_{XY} = j_{X,Y}^1 \phi$  es una «simetría de  $W$  por la derecha», i.e.,

$$W(F, Y) = W(FP_{XY}, X), \quad (1.1)$$

para todo 1-jet  $F$  de un difeomorfismo local en el cuerpo. En este caso,  $P_{XY}$  se denomina un *isomorfismo material entre  $X$  y  $Y$* . Si  $X = Y$ ,  $P_{XX}$  se denomina una *simetría material en  $X$* . El conjunto  $G(X)$  de todas las simetrías materiales en  $X$  es, de hecho, un grupo denominado *grupo de simetría material*.

Los isomorfismos materiales  $P_{XY}$  no son, en general, únicos. De hecho, el conjunto de isomorfismos materiales  $G(X, Y)$  entre  $X$  y  $Y$  puede satisfacer una de las siguientes dos condiciones:

- $G(X, Y) = \emptyset$ .
- $G(X, Y)$  está en correspondencia uno a uno con el grupo de simetría material  $G(X)$  en  $X$ . De hecho,

$$P_{XY} \cdot G(X) = G(X, Y),$$

para cualquier isomorfismo material  $P_{XY} \in G(X, Y)$ .

Un cuerpo  $\mathcal{B}$  se dice *uniforme* si todos sus puntos materiales están hechos del mismo material o, en relación con los isomorfismos materiales,  $\mathcal{B}$  es uniforme si todo par de puntos puede ser unido por un isomorfismo material. En caso de la familia de isomorfismos materiales pueda ser «elegida diferenciablemente», se dirá que  $\mathcal{B}$  es *diferenciablemente uniforme*.

Considerando estos hechos y asumiendo que el cuerpo es diferenciablemente uniforme, Noll introdujo la noción de *paralelismos materiales* y sus correspondientes *conexiones materiales* sin curvatura. Esta idea fue ampliada por C. C. Wang [51] y F. Bloom [5]. La no anulación de la torsión de las conexiones materiales (no necesariamente únicas) juega un papel importante en la formulación de W. Noll. En el caso de grupos de simetría discretos, la conexión material es única y, en tal caso, se dispone de un tensor *canónico* (la torsión de la conexión) que mide *la presencia de defectos materiales*; en la terminología de W. Noll, la anulación de la torsión de la conexión equivale a la noción de *homogeneidad local* del cuerpo, lo cual se interpreta físicamente como la ausencia de defectos.

El fibrado de referencia del cuerpo y, en particular, sus  $G$ -estructuras proporcionan una nueva formulación de estas ideas. En [18], M. Elzanowski, M. Epstein y J. Sniatycki asocian a cualquier cuerpo diferenciablemente uniforme una familia de  $G$ -estructuras conjugadas, denominadas  *$G$ -estructuras materiales*, de tal manera que su integrabilidad caracteriza la homogeneidad del material. Sin embargo, este enfoque presenta ciertas limitaciones. En particular, las  $G$ -estructuras materiales *no están definidas de manera canónica*. Otro de los problemas que presentan todos los enfoques mencionados es que *no se pueden utilizar sobre materiales no uniformes*.

**Esta línea de investigación empieza por la presentación de un marco teórico que resuelve ambos problemas.**

## Grupoide Material

La narrativa de esta línea parte del análisis de la estructura algebraica inherente al conjunto de todos los isomorfismos materiales, denotado por  $\Omega(\mathcal{B})$ , es decir,

$$\Omega(\mathcal{B}) := \{P_{XY} : P_{XY} \text{ es un isomorfismo material entre } X \text{ e } Y\}$$

Es importante destacar que los isomorfismos materiales pertenecen al grupoide de Lie  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \rightrightarrows \mathcal{B}$ , compuesto por los 1-jets de difeomorfismos locales en  $\mathcal{B}$ . Además, la composición de isomorfismos materiales produce un nuevo isomorfismo material, lo que permite definir una operación en  $\Omega(\mathcal{B})$ . Al considerar que las identidades y las inversiones de los isomorfismos materiales también son isomorfismos materiales, obtenemos una única estructura de grupoide sobre  $\Omega(\mathcal{B})$ , tal que  $\Omega(\mathcal{B}) \rightrightarrows \mathcal{B}$  constituye un subgrupoide de  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \rightrightarrows \mathcal{B}$ . A este objeto algebraico se le

denomina *grupoide material* de  $\mathcal{B}$  ([21, 22]).

Es particularmente notable que el grupoide material no solo existe de manera única, sino que su definición es independiente de la uniformidad del material. En este sentido, la construcción de  $\Omega(\mathcal{B})$  y el estudio de sus propiedades constituyen serán esenciales en esta investigación. En particular, se presta especial atención a las implicaciones que esta estructura tiene en el análisis de la uniformidad y homogeneidad del material.

Una primera consecuencia directa de la estructura de grupoide de  $\Omega(\mathcal{B})$  es la caracterización de la uniformidad: *un cuerpo material  $\mathcal{B}$  es uniforme si, y solo si,  $\Omega(\mathcal{B})$  es transitivo*. Surge ahora una pregunta natural: *¿es siempre  $\Omega(\mathcal{B})$  un subgrupoide de Lie de  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ ?* Dicho de otra manera, ¿qué podemos afirmar sobre la estructura diferenciable de  $\Omega(\mathcal{B})$ ?

La respuesta a esta pregunta es, en general, negativa (véase [11] para encontrar ejemplos). De hecho, se ha demostrado que *un material  $\mathcal{B}$  es diferenciablemente uniforme si, y solo si,  $\Omega(\mathcal{B})$  es un subgrupoide de Lie transitivo de  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$* . Esto implica que un material uniforme será diferenciablemente uniforme si la estructura diferenciable de  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$  se hereda por  $\Omega(\mathcal{B})$ .

Dado este contexto, en este punto la línea investigación se dividió en dos enfoques principales.

- (E1) Un primer enfoque que asume que, independientemente de la uniformidad,  $\Omega(\mathcal{B})$  es un subgrupoide de Lie de  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ . Así, la principal ventaja de esta hipótesis radica en la disponibilidad del algebroide de Lie asociado  $A\Omega(\mathcal{B})$ . Esto permite describir explícitamente dicho algebroide como un subalgebroide del algebroide de las derivaciones en  $\mathcal{B}$ , ofreciendo así una serie de resultados que caracterizan tanto la uniformidad como la homogeneidad mediante las propiedades de dicho algebroide de Lie ([33]).
- (E2) El segundo enfoque aborda el desafío de trabajar con el caso general en el cual  $\Omega(\mathcal{B})$  no es necesariamente un subgrupoide de Lie. Para enfrentar este escenario, se introduce la noción de *Distribución Material*.

Aunque, como se ha comentado, se ha trabajado el caso en el que el grupoide material es un subgrupoide de Lie del grupoide de 1-jets ([32, 33]), la narrativa de este proyecto se centrará, principalmente, en el segundo enfoque (E2). En otras palabras, salvo que se especifique lo contrario, *no se hará suposición alguna sobre el grupoide material*.

## Distribución material

En este punto se aplican las distribuciones características a los mencionados materiales simples (véase [11, 23, 30, 34] para los detalles de los contenidos en esta

sección). Sea  $\mathcal{B}$  un cuerpo simple con  $W : \Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \rightarrow V$  como la respuesta mecánica. Entonces, podemos definir el llamado grupoide material  $\Omega(\mathcal{B})$ , que es un subgrupoide (no necesariamente de Lie) del grupoide de Lie de 1-jets  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ . Por lo tanto, *resulta natural construir y aplicar las distribuciones características*.

Sea  $\Theta$  un campo vectorial admisible invariante a izquierda en  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ , es decir,  $\varphi_t^\Theta(\epsilon(X)) \in \Omega(\mathcal{B})$  para todo  $X \in \mathcal{B}$  y  $t$  en el dominio del flujo en  $\epsilon(X)$ . Entonces, se prueba que,

$$TW(\Theta) = 0. \quad (1.2)$$

Así, la distribución característica  $A\Omega(\mathcal{B})^T$  del grupoide material *está generada por los campos vectoriales (invariantes a izquierda) en  $\Pi^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$  que están en el núcleo de  $TW$* . Esta distribución característica se denominará *distribución material*, y la distribución base-característica  $A\Omega(\mathcal{B})^\sharp$  se denominará *distribución cuerpo-material*.

Denotemos por  $\overline{\mathcal{F}}(\epsilon(X))$  y  $\mathcal{F}(X)$  las foliaciones asociadas a la distribución material y la distribución cuerpo-material, respectivamente. Para cada  $X \in \mathcal{B}$ , denotaremos el grupoide de Lie  $\Omega(\mathcal{B})(\mathcal{F}(X))$  por  $\Omega(\mathcal{F}(X))$ .

El uso y la extrapolación de estas nociones ha resultado fructífera. Resumamos rápidamente los primeros avances en esta línea de investigación:

### Uniformidad graduada

Un *subcuerpo generalizado* (o *subvariedad material*)  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$  se define simplemente como una subvariedad de  $\mathcal{B}$  que hereda parte de su estructura material. La respuesta material de  $\mathcal{P}$  se describe restringiendo la función constitutiva  $W$  a los 1-jets de difeomorfismos locales  $\phi$  de  $\mathcal{B}$  que, al actuar, envían puntos de  $\mathcal{P}$  a  $\mathcal{P}$ ; es decir, se consideran únicamente transformaciones compatibles con permanecer dentro de la subvariedad.

La distribución material permite definir la noción de *uniformidad graduada*: se dice que  $\mathcal{B}$  es *diferenciablemente uniforme de grado  $p$  en  $X$*  si  $\dim(A\Omega(\mathcal{B})^\sharp_X) = p$ , y es de grado  $p$  si esto ocurre en todo punto. La uniformidad diferenciable usual se reduce así al caso particular  $p = 3$ . De hecho,  $\mathcal{B}$  es de grado  $p$  en  $X$  si y solo si la hoja diferenciablemente uniforme  $\mathcal{F}(X)$  tiene dimensión  $p$ , y  $\mathcal{B}$  es de grado  $p$  si y solo si la foliación cuerpo-material es regular de rango  $p$ . Dado que la foliación cuerpo-material satisface una condición de maximalidad, se concluye que **todo cuerpo simple posee un único grado de uniformidad**. Esto permite cuantificar de forma geométrica cuán lejos está un cuerpo de ser uniforme, mediante el rango (dimensión) de sus hojas diferenciablemente uniformes. Este desarrollo se puede encontrar en [30].

### Homogeneidad

Un cuerpo es *(localmente) homogéneo* si existe una configuración (local)  $\phi$  que permite construir, a partir de traslaciones, un campo (local) diferenciable de

isomorfismos materiales  $\mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{P}(Y, X) = j_{Y, X}^1(\phi^{-1} \circ \tau_{\phi(X) - \phi(Y)} \circ \phi),$$

para todo  $Y$  en el dominio de  $\phi$  y un  $X$  fijo. En términos de grupoides, esto equivale a poder elegir una sección del grupoide material que sea “constante” en el cuerpo. En particular, la homogeneidad local es más restrictiva que la uniformidad diferenciable: todo cuerpo homogéneo resulta diferenciablemente uniforme. Sin embargo, en una imagen puramente intuitiva, la homogeneidad se interpreta como la ausencia de defectos. Por lo tanto, **tiene sentido desarrollar un concepto de algún tipo de homogeneidad para materiales no uniformes que mida la ausencia de defectos y generalice el concepto conocido**. En la literatura ya podemos encontrar algunas respuestas parciales a esta pregunta ([8, 20] para FGMs y [19, 23] para materiales laminados y fibrados). En [34] resolvemos completamente este problema.

Para un cuerpo no uniforme, la idea intuitiva es exigir que cada hoja  $\mathcal{F}(X)$  de la foliación por subvariedades materiales diferenciablemente uniformes sea (localmente) homogénea y, además, que dichas hojas puedan *enderezarse simultáneamente* de manera compatible con la foliación. Esto lleva primero a definir homogeneidad para subvariedades: una subvariedad  $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$  es *homogénea* si, para todo  $X \in \mathcal{N}$ , existe una configuración local  $\psi$  en un abierto  $U \supset \mathcal{N}$  tal que los 1-jets

$$j_{Y, Z}^1(\psi^{-1} \circ \tau_{\psi(Z) - \psi(Y)} \circ \psi)$$

son isomorfismos materiales para cualesquiera  $Y, Z \in \mathcal{N}$ ; y es *localmente homogénea* si puede cubrirse por abiertos  $U_a$  con  $U_a \cap \mathcal{N}$  homogéneos. Usando la existencia de atlas foliados y la maximalidad de las hojas  $\mathcal{F}(X)$ , se define entonces que un cuerpo simple  $\mathcal{B}$  es *localmente homogéneo* si, para todo  $X \in \mathcal{B}$ , existe una carta foliada  $\psi$  en un abierto  $U \ni X$  tal que los jets anteriores son isomorfismos materiales para todo  $Z \in U \cap \mathcal{F}(Y)$  (y *homogéneo* si  $U = \mathcal{B}$ ). Nótese que aunque en un cuerpo homogéneo todas las hojas  $\mathcal{F}(X)$  son homogéneas, la homogeneidad hoja a hoja no basta en general: hace falta una condición adicional de compatibilidad con la estructura de foliación.

Finalmente, esta homogeneidad “generalizada” admite una caracterización diferencial directa en coordenadas foliadas. Si  $\psi = (x^i)$  es una configuración (local) homogénea y foliada, entonces las derivadas  $\partial/\partial x^l$  para  $1 \leq l \leq \dim(\mathcal{F}(X)) =: K$  son tangentes a la distribución material  $A\Omega(\mathcal{B})^\sharp$ ; equivalentemente, existen funciones locales  $\Lambda_{i,l}^j$  que anulan la variación de  $W$  a lo largo de direcciones foliadas. En el caso homogéneo, puede elegirse  $\Lambda_{i,l}^j = 0$ , obteniéndose el criterio:

$$\frac{\partial W}{\partial x^l} = 0, \quad \forall l \leq \dim(\mathcal{F}(X)).$$

Así,  $\mathcal{B}$  es homogéneo si y solo si en torno a cada punto existen coordenadas locales en las que  $W$  es constante a lo largo de las direcciones tangentes a las hojas uniformes,

lo que expresa de manera transparente la ausencia (generalizada) de defectos en las direcciones materiales privilegiadas por la foliación.

### Evolución material

En este punto se estudia al caso dependiente del tiempo, sustituyendo el cuerpo “congelado” por una *variedad cuerpo–tiempo*  $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times \mathcal{B}$  y una ley constitutiva no estacionaria  $W : \mathcal{C} \times GL(3, \mathbb{R}) \rightarrow V$ , que codifica la variación temporal de las propiedades intrínsecas del material.

**(1) Grupoides tiempo–material y pérdida de regularidad.** La noción clave para comparar material “en tiempos distintos” se formaliza mediante *isomorfismos tiempo–material*. Fijado  $X \in \mathcal{B}$ , el objeto algebraico central es el *grupoide material temporal*  $\Omega_X(\mathbb{R})$ , que registra todas las simetrías (en el sentido constitutivo) a lo largo de la historia completa de la partícula  $X$ . Como en el caso estacionario,  $\Omega_X(\mathbb{R})$  es canónico pero, en general, *no* hereda estructura de Lie; este hecho es precisamente el que motiva el uso sistemático de distribuciones características en evolución material.

**(2) Distribuciones materiales y foliaciones: descomposición canónica del tiempo.** Aplicando la construcción de distribución característica al contexto temporal, se definen las distribuciones  $A\Omega_X(\mathbb{R})^T$  y  $A\Omega_X(\mathbb{R})^\sharp$ , cuyas foliaciones asociadas inducen una *descomposición maximal* de la recta temporal  $\mathbb{R}$  en procesos constitutivamente “constantes”. Dicho de otro modo, la foliación cuerpo–material  $\mathcal{J}_X$  divide el tiempo en intervalos máximos en los que el comportamiento de  $X$  puede interpretarse como un proceso de *remodelación diferenciable* (sin cambio en las propiedades del material).

**(3) Criterio operativo de remodelación: la ecuación de evolución.** Un avance esencial consiste en reducir la detección de remodelación diferenciable al estudio de una ecuación lineal explícita (la *ecuación de evolución de X*)

$$\lambda \frac{\partial W_X}{\partial t} + y_i^j \Theta_j^i \frac{\partial W_X}{\partial y_j^i} = 0,$$

cuyas soluciones generan la distribución material temporal. De este modo, la condición  $\dim(A\Omega_X(\mathbb{R})_t^\sharp) = 1$  para todo  $t$  (equivalentemente, la existencia de una solución con  $\lambda \neq 0$ ) proporciona un *criterio diferencial y verificable* para identificar periodos de remodelación diferenciable.

**(4) Morfogénesis como ruptura de simetría: normalizoide y distribución extendida.** Para capturar cambios *cualitativos* en la simetría (morfogénesis), se introduce el normalizoide  $\mathcal{N}_X(\mathbb{R})$  de  $\Omega_X(\mathbb{R})$  y su distribución característica  $AN_X(\mathbb{R})^T$  (distribución material extendida), junto con su versión base. La foliación extendida  $\mathcal{NF}_X$  produce otra partición maximal de  $\mathbb{R}$  en intervalos donde la evolución es *diferenciable sin morfogénesis*; los instantes fuera de dichas hojas señalan, de manera precisa, *dónde* aparecen procesos diferenciables de morfogénesis (ruptura de simetría).

**(5) Criterio operativo de ausencia de morfogénesis: la ecuación de morfogénesis.** La construcción anterior se traduce en un segundo sistema lineal (la *ecuación de morfogénesis para X*), que se comprueba sobre una base del espacio de soluciones de la condición de simetría instantánea. En términos prácticos,  $X$  no presenta morfogénesis diferenciable en un proceso si, y solo si,

$$\dim\left(AN_X(\mathbb{R})_t^\sharp\right) = 1 \quad \text{para todo } t,$$

Así, análogamente al caso de remodelación, esto convierte la detección de morfogénesis en un problema computable a partir de derivadas de  $W_X$ . Los avances en este sentido hasta la fecha se pueden encontrar principalmente en [27, 35].

### Material de Cosserat: Un modelo más complejo

Hasta este punto, el desarrollo se ha centrado en *materiales simples* (orden 1), donde la respuesta constitutiva depende únicamente del primer gradiente de la deformación. Sin embargo, muchos materiales reales (sólidos granulares, rocas, huesos) requieren *variables cinemáticas adicionales* y, por tanto, modelos más ricos. En este contexto aparecen los *medios de Cosserat*, en los que a cada punto del macromedio se le asocia información microestructural (“directores”), lo que conduce de manera natural a un tratamiento en términos de *fibrados de referencia* y configuraciones como morfismos entre fibrados principales.

#### (1) Grupoide material de segundo orden y dos enfoques complementarios.

En el marco geométrico, la ley constitutiva de un medio de Cosserat se expresa como  $W = W(X, F)$ , donde  $F$  representa el gradiente (no holónimo) de la deformación del fibrado de referencia. Ello induce un *grupoide material no holónimo de segundo orden* que codifica los isomorfismos materiales. A partir de aquí, se desarrollan dos vías: **(E1)** Asumir regularidad (grupoide de Lie) para explotar el algebroid asociado [32]; **(E2)** tratar el caso general (sin estructura de Lie) mediante distribuciones características [29]. Al igual que en la línea de investigación del proyecto, estaremos más interesados en estudiar el caso general **(E2)**.

#### (2) Estructura infinitesimal: dos distribuciones características canónicas.

Un resultado distintivo en Cosserat es la existencia, *asociada canónicamente* a cualquier medio, de **dos** distribuciones características bien definidas:

- La *distribución material no holonómica de segundo orden*, generada por campos invariantes a izquierda en el núcleo de  $TW$ ;
- La *distribución material holonómica de segundo orden*, generada por el levantamiento completo de campos del macromedio en el núcleo de  $TW$ .

En la práctica, ambas distribuciones se construyen resolviendo dos *ecuaciones lineales* explícitas (no holonómica y holonómica), lo que proporciona un criterio operativo para extraer la geometría “material” en presencia de microestructura (ver [29] para la especificación de las ecuaciones).

**(3) Descomposición canónica: partes uniformes vs. partes de segundo grado.** Como consecuencia del formalismo anterior, se obtiene una *descomposición canónica* del medio de Cosserat en *partes* diferenciablemente uniformes y *partes de segundo grado*, entendiéndose por estas últimas aquellas donde la respuesta constitutiva (o los isomorfismos materiales) depende efectivamente de derivadas de segundo orden en el macromedio. En términos geométricos, los *espacios de soluciones* de las ecuaciones material no holonómica/holonómica caracterizan esta partición y cuantifican la complejidad constitutiva del medio.

**(4) Homogeneidad para Cosserat no uniformes: generalización y criterio diferencial.** Un avance central consiste en definir, por primera vez, una noción de *homogeneidad* válida para *medios de Cosserat no uniformes* que generaliza la homogeneidad clásica (ausencia de defectos). La idea geométrica es doble: (i) cada componente diferenciablemente uniforme debe ser homogénea; (ii) estas subvariedades materiales deben poder “enderezarse” simultáneamente de forma compatible. Esta noción admite una caracterización diferencial mediante una *ecuación de homogeneidad* explícita, proporcionando un criterio verificable para detectar inhomogeneidades en presencia de microestructura [29].

### 1.4.2. Objetivos

La primera línea de investigación tiene varios objetivos. Primero, **se basa en extrapolar la teoría para ampliar la gama de materiales en los que se puede aplicar (O1.1)**. Como hemos comentado, la teoría de C.C. Wang y W. Noll, sobre materiales simples, no es lo suficientemente general como para abarcar algunas clases importantes de materiales.

En general, el concepto físico de una fuerza de contacto en un punto implica que las circunstancias en un entorno del punto de aplicación de tal fuerza determinan la respuesta mecánica  $W$  (principio de acción local). Esto da lugar a la forma más general de las ecuaciones constitutivas [48], en las que la respuesta material en una partícula depende, no solo de la primera derivada de la deformación en ese punto (como en *materiales simples*), sino de la restricción de la deformación a un entorno suficientemente pequeño de la partícula. En este contexto, además de los tratados medios de Cosserat, surgen las conocidas como *teorías materiales polares* y *materiales de orden superior*, agregando la necesidad de gradientes de orden superior para caracterizar las relaciones constitutivas [48]. El orden del gradiente más alto que aparece en la descripción se denomina *orden del material elástico*.

Mientras que los primeros y clásicos estudios de la mecánica continua se refieren a materiales simples casi exclusivamente, hay algunas excepciones. Cauchy [10] sugirió una vez que las componentes del tensor de esfuerzos pueden ser «*funciones lineales de desplazamientos ... y sus derivadas de diversos órdenes*». Aparentemente guiados por el trabajo de Cauchy, Levy y ST. Venant [49] propusieron, por separado, una teoría de fluidos en la que se supone que el tensor de esfuerzos es una función de

derivadas espaciales del campo de velocidad de todos los órdenes, pero solo en ciertas combinaciones invariantes. Ambas teorías se basaron en las nociones moleculares de Navier. A partir de entonces, investigadores de la talla de C. Eckart, B. Manfredi, C. Truesdell y W. Noll han contribuido activamente al desarrollo de este tipo de teoría que generalizan a los materiales simples. Hoy en día, este tipo de modelos se puede aplicar en una amplia gamma de materiales, como los llamados *metamateriales mecánicos* [24] en los que la respuesta mecánica depende de las dos primeras derivadas de la deformación. Así, el objetivo **O1.1** se puede dividir en dos objetivos:

- O1.1.1 Marco matemático.** Construir un marco matemático, análogo al de materiales simples y de Cosserat, para el tratamiento de modelos más complejos, empezando por las *teorías materiales polares* y los *materiales de orden superior*.
- O1.1.2 Modelos específicos.** Aplicar los resultados obtenidos a modelos específicos de materiales, entre los que se encuentran los *metamateriales mecánicos* [24] o el *modelo mecánico de crecimiento de tumores sólidos* [9].

Como un segundo objetivo (**O1.2**) se pretende abordar **el estudio materiales compuestos** (mezclas sólidas, laminados, etc.), en los que coexisten *dos o más respuestas constitutivas* que interactúan sobre un mismo sustrato material. La idea central consiste en reemplazar el grupoide material clásico de un material simple (cuyo carácter transitivo caracteriza la uniformidad) por una estructura más rica: un *grupoide doble (material)* que codifique simultáneamente las simetrías (isomorfismos materiales) asociadas a cada constituyente y, crucialmente, sus *condiciones de compatibilidad*.

En términos concretos, este objetivo se articula en los siguientes hitos:

- O1.2.1 Construcción del grupoide doble del compuesto.** Dadas dos estructuras materiales (por ejemplo, dos grupoides materiales transitorios  $\Omega_1(\mathcal{B})$  y  $\Omega_2(\mathcal{B})$ ), construir un *grupoide doble de cuadrados conmutativos* que recoja, en una única superestructura algebraica, la interacción de ambos conjuntos de isomorfismos materiales y su composición compatible.
- O1.2.2 Uniformidad del compuesto y jerarquía de nociones.** Formular una definición geométrica de *uniformidad del compuesto* que generalice el criterio clásico (transitividad del grupoide material) y, aprovechando la riqueza interna de los grupoides dobles, introducir una *taxonomía* de condiciones de uniformidad/compatibilidad, interpretadas como distintos *procesos de completación de cuadrados* (filling conditions) y diferentes nociones de transitividad.
- O1.2.3 Criterios estructurales y consecuencias físicas.** Derivar criterios verificables que relacionen estas nociones con propiedades intrínsecas de los constituyentes (por ejemplo, conjugación/inclusión de grupos de simetría material, existencia de flechas comunes, dominancia de un constituyente,

etc.), clarificando qué condiciones expresan una mezcla “consistente” y cuáles codifican compatibilidades más restrictivas.

**O1.2.4 Ejemplos y alcance.** Proporcionar ejemplos representativos (sólidos cristalinos con simetría mínima) que muestren que: (i) la uniformidad del compuesto puede darse sin satisfacer condiciones más fuertes de compatibilidad, y (ii) las nociones débiles/fuertes distinguen fenómenos geométricos físicamente relevantes.

**O1.2.5 Distribución característica.** Extrapolación del concepto de distribución característica al contexto de grupoides dobles, desde un punto de vista puramente matemático, para aplicarlo después al estudio de las propiedades de los materiales compuestos.

El resultado esperado de (O1.2) se puede entender, por tanto, en la construcción de un lenguaje geométrico robusto para comparar materiales compuestos más allá de la mera intersección de grupoides, capaz de *medir* y *clasificar* la compatibilidad entre constituyentes mediante invariantes de tipo grupoide doble. Este marco está orientado, además, a servir como plataforma para extensiones futuras: compuestos con más de dos materiales, conexión con microestructura, y el estudio posterior de *homogeneidad* en compuestos.

Así, en este punto, se quisiera destacar de nuevo uno de los puntos fuertes de esta línea de investigación: **la amplia gama de potenciales áreas de aplicación: desde la física o la ingeniería con metamateriales mecánicos, hasta la biología con la remodelación de tejidos biológicos en particular, en el tratamiento de tumores.** Por esta razón, se espera que tenga un gran impacto en la comunidad científica. Además, dado que gran parte del proyecto se refiere a la aplicación de resultados puramente matemáticos en otras áreas de investigación, se espera que el desarrollo de este proyecto se traduzca en la *creación de conexiones con otros grupos de investigación, no solo en matemáticas, sino en otras áreas como la física, la ingeniería o la biología.* Obviamente, se espera que estos vínculos generen un aumento exponencial en el impacto de esta teoría en diversas áreas del conocimiento.

## 1.5. Línea 2 de investigación (Lin. 2.)

La segunda línea de investigación del proyecto se centra en el estudio geométrico y la revisión del concepto mismo de *simetría* en sistemas hamiltonianos. En particular, la tesis principal de esta línea de investigación es que la estructura de grupoide supone un ambiente más natural para “*todas las simetrías*” de un sistema hamiltoniano que la de grupo, dado que abarca, en un mismo ente algebraico, tanto las simetrías globales, como otro tipo de simetrías que podríamos llamar *locales* o *puntuales*.

### 1.5.1. Marco teórico específico de la línea

De nuevo, de manera muy resumida, presentaremos el marco teórico de esta línea de investigación.

#### Mecánica hamiltoniana y simetrías

Dado que la Mecánica hamiltoniana es un área muy activa en la actualidad dentro de la Mecánica Geométrica y la Geometría Diferencial, este apartado se presentará de modo muy resumido (para más detalle ver [1]).

Un sistema hamiltoniano se modela como una terna  $(M, \omega, H)$ , donde  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica (espacio de fases) y  $H \in C^\infty(M)$  es el Hamiltoniano. El campo hamiltoniano  $X_H$  viene determinado por la ecuación,

$$\iota_{X_H}\omega = dH,$$

y sus curvas integrales describen la de la ecuaciones de Hamilton. En otras palabras,

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \quad (1.3)$$

donde  $(q^i, p_i)$  son las coordenadas de Darboux de la variedad simpléctica  $(M, \omega)$ .

En este contexto, la noción clásica de simetría se asocia a transformaciones  $\phi$  de  $M$  que preservan (parte de) la estructura:

- i) **La dinámica:**  $\phi_* X_H = X_H$ .
- ii) **La geometría:**  $\phi^* \omega = \omega$ .
- iii) **Ambas:**  $\phi_* X_H = X_H, \quad \phi^* \omega = \omega$ .

Así, en el caso *i*)  $\phi$  es una *simetría dinámica*, en el caso *ii*)  $\phi$  es una *simetría geométrica*, y en el caso *iii*)  $\phi$  es una *simetría dinámica-geométrica*.

subgroupoids of  $\Pi^1(M, M)$  preserving  $G$ -structures [25]

#### Grupoide de symplectomorfismos como caso regular (“telonero”)

La construcción se articula en el grupoide de 1-jets  $\Pi^1(M, M) \rightrightarrows M$  como espacio ambiente. Como primer ejemplo controlado, que sirve al mismo tiempo de base y de inspiración, se considera el subgrupoide de 1-jets que preservan la forma simpléctica:

$$\Pi^1(M, \omega) \subset \Pi^1(M, M),$$

que constituye un subgrupoide de Lie transitivo. Se ha estudiado en profundidad en [25] como ejemplo de subgrupoide que preserva  $G$ -estructuras. Este caso es esencial como *modelo regular* porque permite:

- (a) Fijar la notación y los mecanismos del enfoque por grupoides.
- (b) Mostrar cómo el paso a nivel infinitesimal se expresa de manera natural mediante derivaciones y conexiones.
- (c) Servir de referencia conceptual para el caso verdaderamente relevante, donde la regularidad falla.

### Simetrías globales/locales/puntuales y grupoides canónicos

En este punto radica la idea rectora de esta línea de investigación. Así, vamos a comenzar por la intuición que impulsa la investigación protagonista en esta línea.

En mecánica hamiltoniana, las simetrías *globales* son, sin duda, fundamentales: cuando un sistema admite una transformación definida en todo el espacio de fases que preserva la estructura (por ejemplo, la forma simpléctica y/o el Hamiltoniano), esa invariancia suele traducirse en leyes de conservación, reducción del sistema y una comprensión estructural profunda de su dinámica. Sin embargo, en muchos problemas reales esta perspectiva es demasiado exigente: no siempre existe una transformación global que actúe sobre *todo* el espacio de fases y preserve el comportamiento del sistema.

La razón es sencilla e intuitiva: el espacio de fases puede estar *estratificado* por regiones con geometría o dinámica cualitativamente distintas (separatrices, zonas de regularidad frente a zonas singulares, conjuntos críticos del Hamiltoniano, etc.). En ese escenario, pueden existir transformaciones que *sí* identifican el comportamiento del sistema *localmente* entre dos puntos (o entre dos pequeñas regiones), pero que no pueden extenderse de manera coherente a una transformación global. En otras palabras, el sistema puede presentar *simetrías locales* que preservan la dinámica “en un entorno”, aunque no exista una simetría que preserve simultáneamente toda la película completa.

Como caso límite, se definen las *simetrías puntuales* (a primer orden), es decir, codificada por el 1-jet de una transformación que preserva las cantidades relevantes *en un punto*. Este nivel puntual, si bien no permite comparar el comportamiento local de dos puntos, su estudio y comparación con las simetrías locales puede resultar de utilidad. Así, aparecen tres niveles naturales de simetría: global, local y puntual.

Aquí es donde el lenguaje de *grupoides* resulta especialmente natural. En lugar de exigir una acción global (un grupo actuando en todo  $M$ ), un grupoide permite codificar *flechas* (transformaciones admisibles) entre pares de puntos, admitiendo que dichas flechas existan sólo en determinados pares (simetría local) o incluso sólo

a nivel de 1-jet (simetría puntual). Dicho de otro modo: un grupoide proporciona una *estructura algebraica* capaz de agrupar las simetrías globales, las locales y las puntuales, y de expresar con precisión cuándo dos puntos del espacio de fases son “equivalentes” desde el punto de vista de la dinámica o de la geometría simpléctica.

Específicamente, las simetrías que se considerarán serán las siguientes:

**Definición 1.5.1.** *Sea un sistema hamiltoniano  $(M, \omega, H)$ . Un difeomorfismo (local)  $\phi : M \rightarrow M$  se clasifica como,*

1. **Simetría dinámico-geométrica global:**  $\phi_* X_H = X_H, \quad \phi^* \omega = \omega.$

2. **Simetría dinámico-geométrica local de  $x$  a  $y$ :**

$$(\phi|_U)_* X_H = X_H, \quad \phi^* \omega = \omega,$$

para algún abierto  $U$  con  $x \in U$  e  $y = \phi(x)$ .

3. **Simetría dinámico-geométrica puntual de  $x$  a  $y$ :**

$$\phi_* X_H(x) = X_H(x), \quad \phi^* \omega(x) = \omega(x),$$

con  $y = \phi(x)$ .

Las simetrías puramente geométricas o dinámicas se definirán de forma análoga. Así, de forma orgánica surgen los subgrupoides canónicos que codifican todas estas simetrías. En particular, el conjunto de 1-jets de simetrías dinámico-geométricas locales  $\Pi_{\text{loc}}^1(M, \omega, H)$  se llamará **grupoide de simetrías dinámico-geométricas locales**. Por otro lado, la colección de 1-jets de simetrías dinámico-geométricas puntuales  $\Pi^1(M, \omega, H)$  se denominará **grupoide de simetrías dinámico-geométricas puntuales**. Los grupoides análogos para las simetrías dinámicas y geométricas se denotarán  $\Pi_{\text{loc}}^1(M, H)$ ,  $\Pi^1(M, H)$ ,  $\Pi_{\text{loc}}^1(M, \omega)$ , y  $\Pi^1(M, \omega)$ , respectivamente.

Esto induce seis subgrupoides canónicos de  $\Pi^1(M, M)$  que codifican, respectivamente, todas las simetrías definidas. La diferencia crucial entre el mundo puntual y el local aparece precisamente cuando  $X_H$  posee singularidades: en general, un 1-jet puede satisfacer condiciones puntuales de invariancia sin ser el 1-jet de una simetría válida en un entorno.

Un punto crucial aquí es que, debido a la eventual existencia de singularidades en el sistema, los grupoides  $\Pi_{\text{loc}}^1(M, \omega, H)$ ,  $\Pi^1(M, \omega, H)$ ,  $\Pi_{\text{loc}}^1(M, H)$ , y  $\Pi^1(M, H)$ , no son, en general, subgrupoides de Lie de  $\Pi^1(M, M)$ . Así, *encontramos, no sólo un marco de aplicación de la teoría de grupoides (existencia de grupoides canónicos que codifican las simetrías), sino un contexto adecuado para la aplicación de la teoría que rodea la distribución característica.*

### 1.5.2. Objetivos

El primer objetivo en esta línea (**O2.1**) se fundamenta en el estudio sistemático de las propiedades intrínsecas de los grupoide canónicos de simetrías. Específicamente, se afrontarán los siguientes objetivos:

- (O2.1.1) Diferencia genuina entre simetrías puntuales y simetrías locales.** Se busca estudiar cuando las nociones de simetría puntual (a nivel de 1-jet) y simetría local (en abiertos) coinciden. Se espera que la discrepancia esté controlada por la estructura del conjunto de singularidades de  $X_H$ . El objetivo se fundamenta busca clasificar en detalle los casos en los que ambos grupoides son iguales, y cuales son las consecuencias sobre el sistema hamiltoniano.
- (O2.1.2) Transitividad.** Notemos que la transitividad de uno de estos grupoides se traduce, sobre el sistema, en que todos los puntos son simétricos respecto a tipo de simetría que codifique el grupoide. Es decir, el estudio de la transitividad (o falta de ella) resulta esencial.

Mientras que los grupoides de simetrías geométricas son, de facto, transitivos, en presencia de singularidades del hamiltoniano el resto no lo son. Así, se comprueba fácilmente que el grupoide de simetrías puntuales induce una clasificación “grosera” (regular-singular), el grupoide de simetrías locales parece inducir una clasificación mucho más fina de puntos singulares que va a depender del *orden* de la singularidad. Esta clasificación tiene interés propio y puede tener consecuencias importante sobre las propiedades del sistema.

- (O2.1.3) Diferenciabilidad.** Se demuestra que no puede asumirse que los grupoides de simetrías sean subgrupoides de Lie. La intuición geométrica es que, cerca de singularidades las fibras relevantes pueden cambiar de dimensión y la estructura de subvariedad compatible con las operaciones del grupoide se rompe.

Se estudiará y caracterizará la diferenciabilidad en todos los casos. Además, se estudiarán las implicaciones físicas de la diferenciabilidad (o no diferenciabilidad del grupoide) sobre es el sistema hamiltoniano.

El siguiente objetivo de esta línea (**O2.2**) será construir y caracterizar las distribuciones características asociadas a los diferentes grupoides de simetrías, obteniendo ecuaciones invariantes explícitas que permitan su cálculo en práctica. Así, el objetivo **O2.2** se divide de la siguiente manera:

- (O2.2.1) Algebroides del grupoide simpléctico.** Calcular el algebroides de Lie de  $\Pi^1(M, \omega)$  e identificarlo en términos de derivaciones simplécticas y conexiones simplécticas, como puente conceptual hacia el caso no regular.

- (O2.2.2) **Simetrías geométrico–dinámicas puntuales.** Caracterizar la distribución asociada a  $\Pi^1(M, \omega, H)$  mediante dos condiciones invariantes: preservación infinitesimal de  $\omega$  e invariancia del campo  $X_H$  ( $DX_H = 0$ ).
- (O2.2.3) **Simetrías geométrico–dinámicas locales.** Caracterizar la distribución asociada a  $\Pi_{\text{loc}}^1(M, \omega, H)$  en términos de campos hamiltonianos que conmutan con  $X_H$ , y relacionar esta condición con observables cuya evolución es lineal a lo largo del flujo.
- (O2.2.4) **Sublínea operativa: “recetario” local.** Producir un procedimiento local (en coordenadas) para construir generadores de las distribuciones a partir de derivadas finitas de  $H$  y de la estructura simpléctica, orientado a su aplicación en ejemplos.

El siguiente objetivo (O2.3) se fundamenta en el hecho de que las distribuciones características son, en cualquier caso integrables. Así, se tratará de integrar las distribuciones características para obtener foliaciones singulares del espacio de fases y demostrar su maximalidad como descomposiciones en hojas de puntos (globalmente/localmente/puntualmente) simétricos.

- (O2.3.1) **Foliación maximal geométrico–dinámica local.** Demostrar que la foliación asociada a  $\Pi_{\text{loc}}^1(M, \omega, H)$  es la foliación más gruesa cuyas hojas están formadas por puntos conectados por simetrías geométrico–dinámicas locales.
- (O2.3.2) **Foliación maximal dinámica local.** Demostrar el análogo para  $\Pi_{\text{loc}}^1(M, H)$  y comparar ambas foliaciones (qué información añade la geometría simpléctica).
- (O2.3.3) **Reducción máxima por foliaciones.** Definir el cociente por estas foliaciones y estudiar condiciones bajo las cuales la dinámica desciende al cociente, planteando una teoría de reducción canónica “máxima” por simetrías locales como trabajo posterior natural.

De un modo análogo a como ocurrió con el trabajo en la línea 1 (Lin. 1.), la consecución de este trabajo supone un punto de partida totalmente novedoso y la creación de una nueva línea de investigación que puede dar muchos frutos en el área de *Mecánica Geométrica*. En particular, dado que está pensado para “revisitar” el concepto de simetría en un nivel muy básico (mecánica simpléctica), los desarrollos relaizados son naturalmente extensibles a sistemas más complejos y, de este modo, alcanzamos el cuarto objetivo de esta línea (O2.4): Extender el programa a otros marcos donde aparecen simetrías no globales. Algunos de estas extensiones son las siguientes:

- (O2.4.1) **Geometría de contacto:** La geometría de contacto resulta especialmente útil en termodinámica y en sistemas hamiltonianos disipativos. Así, un estudio análogo se puede hacer para grupoides de contactomorfismos y simetrías locales en sistemas disipativos.

- (O2.4.2) **Contextos de Poisson:** Compatibilidad con foliaciones simplécticas y simetrías locales en variedades de Poisson.
- (O2.4.3) **Geometría multisimpléctica/covariante:** Simetrías locales en teorías de campos y reducción inducida por foliaciones.

## 1.6. Línea 3 de investigación (Lin. 3.)

La tercera línea de investigación (Lin. 3.) explota una consecuencia particularmente potente del uso de la *distribución característica* en un ejemplo específico: el *grupoide par*  $M \times M \rightrightarrows M$ . La idea central es la siguiente. Sea  $M$  una variedad y  $M \times M \rightrightarrows M$  el llamado *grupoide par*. Entonces, cualquier subgrupoide transitivo de  $M$  viene dado por un grupoide par  $X \times X$  de un subconjunto  $X \subseteq M$ . Nota que si  $X$  es, simplemente, un subconjunto,  $X \times X$  no tiene estructura de variedad diferenciable y, por lo tanto,  $X \times X \rightrightarrows X$  no es un subgrupoide de Lie de  $M \times M \rightrightarrows M$ . Así, usando toda la maquinaria construida sobre la distribución característica obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.6.1.** *Sea  $M$  una variedad y  $X$  un subconjunto de  $M$ . Entonces, existe una foliación maximal  $\mathcal{F}$  de  $M$  tal que  $X$  es la unión maximal de hojas.*

Así, a grandes rasgos, la foliación maximal dada en el teorema 1.6.1 parece permitirnos intuir una estructura diferenciable sobre cualquier subconjunto  $X$  de una variedad  $M$ , que generaliza la estructura de variedad. Notemos que el significado de maximal que se está tomando es que la foliación es la *más gruesa* de todas las foliaciones de  $M$  que dividen a  $X$  en unión de hojas.

El objetivo general de esta línea es convertir este hecho en fundamento teórico para una *estructura generalizada de variedad* sobre subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  (y, por extensión, de variedades), que recupere la noción clásica cuando corresponda y que incluya como casos particulares las *variedades con borde* y las *variedades con esquinas*. Finalmente, se pretende comparar esta estructura con nociones conocidas como *espacios diferenciales* y *espacios difeológicos*, clarificando ventajas, limitaciones y relaciones.

### 1.6.1. Marco teórico específico de la línea

Siguiendo una estructura similar a las líneas anteriores, presentemos brevemente el marco teórico de esta línea de investigación.

#### El grupoide par como instrumento universal

Para una variedad diferenciable  $M$ , el grupoide par  $M \times M \rightrightarrows M$  se define como aquel grupoide de Lie cuyas flechas son todos los pares  $(x, y)$  con  $x, y \in M$ , y la

multiplicación se define como,

$$(y, z) \cdot (x, y) = (x, z), \quad \forall x, y, z \in M.$$

Así, este grupoide es, de facto, totalmente transitivo: Hay una “*flecha*” (única) entre cualesquiera dos puntos. Dado un subconjunto  $X \subset M$ , el subgrupoide  $X \times X$  no tiene a priori ninguna condición de regularidad geométrica sobre  $X$ .

## Distribución característica aplicada a $X \times X$

Aunque  $X \times X$  no sea una subvariedad de  $M \times M$ , la distribución característica asociada (y su versión base) están bien definidas. La integrabilidad de la distribución base produce una foliación singular  $\mathcal{F}_X$  de  $M$  tal que  $X$  es unión maximal de hojas. La condición de maximalidad garantiza que  $\mathcal{F}_X$  es la foliación *más gruesa* con esa propiedad.

## La foliación asociada como “huella diferenciable” de $X$ .

Intuitivamente,  $\mathcal{F}_X$  extrae de  $X$  la información diferencial que ya está “*contenida*” en el espacio ambiente  $M$  y que es compatible con el hecho de que  $X$  sea una unión de hojas.

### 1.6.2. Objetivos

El primer y principal objetivo de esta línea **(O3.1)** es el de construir una estructura generalizada de variedad inducida por la foliación maximal. Así, se trata de desarrollar una teoría sistemática que, dado  $X \subset \mathbb{R}^n$  (o  $X \subset M$ ), asigne una estructura diferencial generalizada partir de la foliación maximal  $\mathcal{F}_X$ .

- (O3.1.1) Marco matemático: cartas y atlas.** Definir cartas locales sobre  $X$  inducidas por cartas foliadas del ambiente y construir un atlas compatible. Establecer la noción de cambio de cartas y equivalencia de atlas en este contexto.
- (O3.1.2) Cálculo diferencial: tangentes, curvas y derivadas.** Definir el espacio tangente  $T_x X$ , no igual pero inducido por las hojas de la foliación y desarrollar definiciones coherentes de: derivada de una curva, derivada de una función, diferencial, y campos vectoriales sobre  $X$ .
- (O3.1.3) Compatibilidad con el caso clásico.** Probar que, si  $X$  es una subvariedad embebida, la estructura recupera la estructura de variedad usual. Aislar condiciones suficientes para que  $X$  sea una única hoja (caso “variedad”).
- (O3.1.4) Ejemplos: borde y esquinas.** Demostrar que variedades con borde y con esquinas encajan como casos particulares del formalismo, identificando explícitamente las cartas modelo y el comportamiento de la foliación en dichos casos.

- (O3.1.5) Comparación con espacios diferenciales y difeológicos.** Comparar la estructura inducida con marcos existentes: establecer inclusiones/equivalencias cuando existan, y clarificar diferencias conceptuales (especialmente el rol de maximalidad/canonicidad).

Una vez construido el marco teórico de este tipo de estructuras de variedad generalizada, se abre un amplio camino de desarrollo y aplicación. Algunos de los objetivos a afrontar serán los siguientes:

- (O3.2) Desarrollo de la teoría.** Una vez presentados los fundamentos, hay toda una teoría geométrica que tiene sentido desarrollar: formas diferenciales, derivada de Lie, derivada exterior, flujo de campos de vectores, etc. Este objetivo se fundamentará en seguir ese camino.
- (O3.3) Mecánica hamiltoniana.** Se aplicará en el modelado geométrico de los espacios de configuración de los sistemas hamiltonianos más generales que aquellos que son, de facto, variedades diferenciales.

Esta línea de investigación constituye actualmente la base del trabajo doctoral de una estudiante del programa de doctorado de Ciencias de la UNED, dirigida por el autor del proyecto.

## 1.7. Línea 4 de investigación (Lin. 4.)

Esta línea tiene un carácter deliberadamente resumido y complementario: no pretende abrir un “cajón de sastre”, sino identificar un conjunto pequeño de contextos en los que el binomio *grupoide + distribución (característica)* proporciona un marco riguroso para describirla. La motivación principal es que, en numerosos problemas, las transformaciones relevantes no forman un grupo de Lie global (ni siquiera una acción global), sino una familia de transformaciones *locales* o *parciales*, cuyo dominio de definición, regularidad o compatibilidad depende del punto o del estrato considerado. En estos casos, el grupoide es el objeto algebraico natural, y la distribución característica es la herramienta canónica para extraer estructura diferencial (foliaciones) cuando falla la regularidad.

### 1.7.1. Objetivos

Dado que el marco teórico está ya explicado, pasaremos directamente a explicar algunos de los objetivos identificados. Es importante resaltar, de nuevo, que esta línea de investigación resulta una línea complementaria; siendo las tres primeras las líneas más relevantes del proyecto.

- (O4.1) Geometric Deep Learning.** En *Geometric Deep Learning* (GDL) es habitual imponer o explotar invariancias/equivarianzas respecto a transformaciones del

dato: isometrías, acciones de grupos (rotaciones, permutaciones), cambios de gauge, o simetrías locales definidas por la geometría de una variedad, un grafo o un complejo. El caso “ideal” (acción global de un grupo) cubre sólo una parte de los modelos reales: en práctica, aparecen simetrías *dependientes del punto* (frames locales, simetrías restringidas por bordes/esquinas, o transformaciones definidas sólo sobre subregiones del dominio). La propuesta de esta línea es formular esas simetrías mediante grupoides (por ejemplo, como transformaciones locales admisibles entre vecindarios o entre elementos de una discretización) y estudiar su estructura infinitesimal mediante distribuciones.

**(O4.1.1) Grupoides de simetrías locales del dato.** Modelar, mediante grupoides, transformaciones admisibles del dato geométrico (variedades discretizadas, grafos, complejos) que sean locales, parciales o dependientes del punto, incluyendo casos donde la simetría cambia por bordes, esquinas o estratificación.

**(O4.1.2) Equivarianza por hojas.** Interpretar ciertas arquitecturas equivariantes como realización “por hojas” (o por estratos) de invariancias locales compatibles, y usar las foliaciones inducidas por la distribución característica para describir de forma intrínseca cuándo la equivarianza global es imposible pero sí existe una equivarianza local coherente.

**(O4.1.3) Caso de estudio.** Proponer un caso de estudio representativo en el que el formalismo por grupoides explique con claridad qué simetrías pueden imponerse y cuáles no, sin necesidad de introducir supuestos globales artificiales.

**(O4.2) Simetrías en EDPs (enfoque general).** En numerosos problemas de física, ingeniería, economía o finanzas, la dinámica o la optimización se traduce en *ecuaciones en derivadas parciales*. Cuando una EDP admite *simetrías continuas* (transformaciones suaves de variables independientes y/o dependientes que preservan la ecuación), la teoría de Lie proporciona un lenguaje sistemático para explotar dichas invariancias: permite identificar *invariantes* y reescribir la ecuación en variables adaptadas, reduciendo su complejidad (por ejemplo, disminuyendo el número efectivo de variables) y produciendo soluciones invariantes o familias de soluciones con estructura controlada.

En particular, el uso práctico de simetrías de Lie en EDPs suele seguir el esquema: *detectar el grupo de simetrías, calcular invariantes independientes y reducir* el problema a una ecuación más simple en términos de esos invariantes; incluso cuando no se obtiene una solución cerrada, el procedimiento aporta restricciones estructurales útiles sobre el espacio de soluciones.

Así, resulta natural reemplazar el grupo por un *grupoide de simetrías*, cuyas flechas codifican transformaciones admisibles *entre puntos* o *entre entornos*

del dominio/espacio de estados. De manera esquemática, el grupoide permite agrupar en un mismo marco:

- **Simetrías globales:** transformaciones definidas en todo el dominio que dejan invariante la EDP.
- **Simetrías locales:** transformaciones definidas en un abierto  $U$  (dependiente del punto) que preservan la EDP en  $U$ .
- **Simetrías puntuales:** condiciones impuestas sólo en un punto, típicamente a nivel de 1-jet (preservación “*infinitesimal*” de la EDP).

La ventaja conceptual es doble: se puede comparar rigurosamente el nivel local frente al puntual (cuándo un 1-jet integrable proviene de una simetría local), y cuando la colección de simetrías no forma un objeto suave (no es un grupoide de Lie), la *distribución característica* asociada al subgrupoide de simetrías proporciona un sustituto infinitesimal canónico. Su integración induce foliaciones singulares que descomponen el dominio (o el espacio de estados) en regiones máximas donde la EDP es “localmente equivalente” bajo simetrías admisibles, sugiriendo además cocientes/reducciones intrínsecamente definidos.

## 1.8. Resumen de objetivos

Resumen global de objetivos de investigación		
Línea 1 (Lin. 1): Material Geometry		
O1.1	O1.1.1	Construir un formalismo análogo al de materiales simples/Cosserat para teorías polares y materiales de orden superior, identificando estructuras canónicas (grupoides y distribuciones) y sus nociones de uniformidad/homogeneidad.
	O1.1.2	Aplicar el marco anterior a modelos representativos (metamateriales mecánicos, crecimiento de tumores u otros modelos constitutivos relevantes), extrayendo propiedades geométricas interpretables.
O1.2	O1.2.1	Construcción del <i>grupoide doble</i> del compuesto que unifique la interacción de isomorfismos materiales de cada constituyente y su composición compatible.
	O1.2.2	Definir <i>uniformidad del compuesto</i> y proponer una jerarquía de nociones de uniformidad interpretadas como procesos de <i>completación de cuadrados</i> y distintas nociones de transitividad.
	O1.2.3	Derivar criterios estructurales verificables (conjugación/inclusión de grupos de simetría, existencia de flechas comunes, dominancia de un constituyente, etc.) y sus consecuencias físicas.
	O1.2.4	Proporcionar ejemplos representativos que distingan uniformidad frente a compatibilidades más fuertes y muestren el alcance de la taxonomía propuesta (sólidos cristalinos con simetría mínima).
	O1.2.5	Extrapolar el concepto de <i>distribución característica</i> al contexto de <i>grupoides dobles</i> y aplicarlo al análisis geométrico de materiales compuestos.

Resumen global de objetivos de investigación		
Línea 2 (Lin. 2): Local Symmetries		
O2.1	O2.1.1	Estudiar cuándo las nociones de simetría puntual (a nivel de 1-jet) y simetría local (en abiertos) coinciden, y caracterizar la discrepancia en términos del conjunto de singularidades de $X_H$ .
	O2.1.2	Analizar la transitividad (o falta de ella) y la estructura de órbitas; en particular, extraer la clasificación fina de puntos singulares inducida por simetrías locales (dependiente del orden de la singularidad).
	O2.1.3	Caracterizar la (no) diferenciabilidad de los grupoides canónicos de simetrías; explicar geoméricamente el fallo de estructura de Lie cerca de singularidades y estudiar sus consecuencias en el sistema.
O2.2	O2.2.1	Calcular el algebroide de Lie de $\Pi^1(M, \omega)$ e identificarlo en términos de derivaciones y conexiones simplécticas (caso regular “telonero”).
	O2.2.2	Caracterizar la distribución asociada a $\Pi^1(M, \omega, H)$ mediante invariancia simpléctica e invariancia hamiltoniana ( $DX_H = 0$ ).
	O2.2.3	Caracterizar la distribución asociada a $\Pi_{\text{loc}}^1(M, \omega, H)$ mediante campos hamiltonianos que conmutan con $X_H$ y su interpretación en términos de observables.
	O2.2.4	Producir un procedimiento local (“recetario”) para construir generadores de las distribuciones a partir de derivadas finitas de $H$ y de la estructura simpléctica.
O2.3	O2.3.1	Demostrar la maximalidad de la foliación asociada a $\Pi_{\text{loc}}^1(M, \omega, H)$ : hojas formadas por puntos conectados por simetrías geométrico-dinámicas locales.
	O2.3.2	Demostrar el análogo para $\Pi_{\text{loc}}^1(M, H)$ y comparar ambas foliaciones (¿qué información añade la geometría simpléctica?).
	O2.3.3	Definir el cociente por dichas foliaciones y estudiar condiciones para que la dinámica descienda al cociente (base de una reducción canónica “máxima”).
O2.4	O2.4.1	Extender el enfoque a geometría de contacto: grupoides de contactomorfismos y simetrías locales en sistemas disipativos/termodinámicos.
	O2.4.2	Extender a contextos de Poisson: simetrías locales compatibles con foliaciones simplécticas.
	O2.4.3	Extender a geometría multisimpléctica/covariante: simetrías locales en teorías de campos.

<b>Resumen global de objetivos de investigación</b>		
<b>Línea 3 (Lin. 3): Generalized Manifold Structures</b>		
<b>O3.1</b>	<b>O3.1.1</b>	Definir cartas locales sobre $X$ inducidas por cartas foliadas del ambiente y construir un atlas compatible; establecer cambios de carta y equivalencia de atlas.
	<b>O3.1.2</b>	Desarrollar cálculo diferencial sobre $X$ : espacio tangente inducido por hojas, derivada de curvas, derivada de funciones, diferencial y campos vectoriales.
	<b>O3.1.3</b>	Probar compatibilidad con el caso clásico: si $X$ es subvariedad embebida, recuperar la estructura usual; aislar condiciones para que $X$ sea una única hoja (caso “variedad”).
	<b>O3.1.4</b>	Incluir como ejemplos particulares variedades con borde y con esquinas, identificando cartas modelo y el papel de la foliación maximal.
	<b>O3.1.5</b>	Comparar la estructura inducida con espacios diferenciales y difeológicos: equivalencias parciales, diferencias conceptuales y rol de maximalidad/canonicidad.
<b>O3.2</b>	<b>O3.2.1</b>	Desarrollar la teoría geométrica asociada: formas diferenciales, derivada de Lie, derivada exterior, flujos y herramientas básicas en el marco generalizado.
<b>O3.3</b>	<b>O3.3.1</b>	Aplicar el formalismo al modelado geométrico de espacios de configuración/estados en sistemas hamiltonianos (y otros) que no sean variedades diferenciales clásicas.
<b>Línea 4 (Lin. 4): In search of new horizons</b>		
<b>O4.1</b>	<b>O4.1.1</b>	Modelar, mediante grupoides, simetrías locales/parciales del dato geométrico en <i>Geometric Deep Learning</i> .
	<b>O4.1.2</b>	Interpretar arquitecturas equivariantes usando foliaciones inducidas por distribución característica.
	<b>O4.1.3</b>	Proponer un caso de estudio acotado donde el formalismo por grupoides clarifique la teoría propuesta.
<b>O4.2</b>	<b>O4.2.1</b>	Simetrías (globales/locales/puntuales) en EDPs.
	<b>O4.2.2</b>	Usar distribución característica para obtener foliaciones maximalmente gruesas en las que la EDP sea “localmente equivalente” por simetrías admisibles.
	<b>O4.2.3</b>	Explorar la conexión con reducciones/cocientes canónicos inducidos por dichas foliaciones en problemas prototipo.

## Resumen de otros objetivos

Resumen de otros objetivos	
OS1	Creación de conexiones con otros grupos de investigación en diversas áreas, como física o ingeniería.
OS2	Difusión de los resultados en congresos, tanto nacionales como internacionales.
OS3	Colaboración e implementación de los resultados obtenidos en modelos específicos de materiales, entre los que se destacan los metamateriales mecánicos y el crecimiento de tumores.

Además, se participará en varios congresos nacionales e internacionales especificados en el Plan de difusión y comunicación de resultados presentado en este proyecto, con objeto de difundir el proyecto, y de crear conexiones con grupos de investigación de otras universidades (nacionales o internacionales).

## 1.9. Plan de trabajo y metodología

El desarrollo de esta propuesta se apoya, por un lado, en la actividad investigadora ya consolidada del autor en el ámbito de la Mecánica Geométrica, distribuciones, foliaciones y grupoides, y por otro, en la integración del trabajo en proyectos competitivos y en una dinámica estable de colaboración y supervisión doctoral. En la actualidad, la investigación se realiza bajo el paraguas del proyecto “*Geometría de sistemas dinámicos: de la teoría a las aplicaciones*” (PID2022-137909NB-C21), con horizonte temporal hasta 2027. Adicionalmente, el autor forma parte del equipo de investigación del proyecto “*Geometric and Algebraic foundations of Physics (GeomAlgPhys)*”, actualmente en evaluación en la convocatoria 2025 de *Proyectos de Generación de Conocimiento*. El proyecto de investigación aquí presentado se alinea con las líneas de trabajo de estas iniciativas y se beneficiará de su marco de cooperación, discusión y difusión científica.

### **Supervisión doctoral y metodología de trabajo con estudiantes.**

Actualmente el autor dirige dos tesis doctorales, iniciadas durante el presente curso, cuyos objetivos académicos se enmarcan en las líneas 2 y 3 de este proyecto, respectivamente. Ambos doctorandos están integrados en el *Programa de Doctorado en Ciencias de la UNED*, de modo que el plan de trabajo incluye desde el inicio una estructura de seguimiento con hitos académicos claros (formación, seminarios, resultados parciales y redacción). De hecho, la dinámica de trabajo con los estudiantes se está organizando del modo siguiente:

- **Reunión periódica de seguimiento.** Reuniones semanales o quincenales (según fase) para: fijar objetivos a corto plazo, revisar avances técnicos, depurar demostraciones y planificar escritura.

- **Seminario interno de lectura.** Un seminario de lectura continuo, con rotación de exposiciones, centrado en: (i) grupoides y distribuciones (núcleo común), (ii) simetrías locales en sistemas hamiltonianos (Lin. 2), y (iii) foliaciones maximales y estructuras diferenciables generalizadas (Lin. 3). Actualmente uno de los estudiantes participa activamente en un seminario sobre grupoides y aplicaciones “[Reading Groupoid Sessions](#)”, que se organiza en colaboración con varios centros de investigación y universidades (ICMAT-UCM-IMPAN-KMMF-UW).
- **Integración en la comunidad.** Presentación periódica de avances en seminarios (internos/externos) y congresos internacionales para entrenar la comunicación científica y someter resultados a discusión.

**Metodología científica general.** La metodología seguirá los procedimientos bien establecidos en investigación matemática: formulación precisa de hipótesis, análisis crítico, demostración rigurosa, validación por contraste con ejemplos y contraejemplos, y verificación de coherencia con la literatura existente. Dado el carácter geométrico del proyecto, se priorizarán:

- El aislamiento de objetos canónicos (grupoides, subgrupoides, distribuciones y foliaciones),
- La obtención de caracterizaciones equivalentes (algebraicas, diferenciales y locales en coordenadas),
- La extracción de consecuencias estructurales (maximalidad de foliaciones, descomposiciones canónicas, criterios operativos).

Cuando proceda (por ejemplo, en ejemplos concretos o en validación de construcciones), se incorporarán comprobaciones computacionales o simbólicas elementales, siempre subordinadas al argumento teórico.

**Colaboraciones y red científica.** Será de especial interés mantener y ampliar colaboraciones con investigadores externos para discutir problemas específicos, contrastar enfoques y fortalecer la proyección interdisciplinar del proyecto. En particular, se contempla la interacción con Reuven Segev (Ben-Gurion University) y David Steigmann (UC Berkeley), aprovechando coincidencias en congresos o estancias cortas, así como con otros grupos afines en geometría, mecánica y control.

**Producción científica y difusión.** A partir de la investigación ya realizada y de los objetivos formulados en las cuatro líneas, el equipo se concentrará en obtener resultados publicables en revistas de referencia (JCR) en áreas como Matemática Aplicada, Geometría, Física Matemática y Mecánica de Materiales. La estrategia de difusión será doble: (i) publicación de artículos y preprints (cuando proceda), y (ii) presentación sistemática en seminarios, congresos y talleres especializados. Este plan se complementará con reuniones periódicas (preferiblemente presenciales cuando sea posible) y con viajes orientados tanto a la difusión como a la consolidación de colaboraciones.

## 1.10. Plan de difusión y comunicación de resultados

La comunicación científica de los resultados se divide en los siguientes apartados:

- **Artículos científicos:** Siempre que los resultados obtenidos puedan expresarse en un artículo, primero se cargará en el servidor de arXiv, lo que supondrá que los artículos estarán siempre disponibles en abierto. Luego se enviará a una revista científica de prestigio.
- **Seminarios:** Los resultados se presentarán en el área de Geometría Diferencial, y aplicaciones a la Mecánica de Medios Continuos. Estos serán fundamentalmente presentados en el seminario en Geometría, Mecánica y Control ([Seminario de Mecánica Geométrica](#)), gestionado por el ICMAT. Se organizarán seminarios adicionales en la UNED, para la difusión de los resultados en la universidad.
- **Conferencias:** Los resultados obtenidos se presentarán tanto en congresos generales como talleres especializados. Más particularmente, participaré en varios congresos internacionales en Matemáticas y Mecánica de Medios Continuos, para difundir los resultados que se han conseguido hasta el momento y los que se obtengan. Entre ellos, me gustaría destacar los siguientes:
  - X<sup>o</sup> Congreso Internacional de Matemática Industrial y Aplicada (ICIAM).
  - Conferencia Internacional de Mecánica de Sólidos (ICSM).
  - Reunión Anual SIAM 202X (AN2X), 202X.
  - International Conference on Nonlinear Solid Mechanics (ICoNSoM).
  - El X<sup>o</sup> Congreso Internacional de Mecánica Teórica y Aplicada (ICTAM).
  - Taller Internacional de Otoño sobre Geometría y Física (Anual).
  - “X” Encuentro Iberoamericano de Geometría, Mecánica y Control (Anual).
  - X<sup>a</sup> conferencia sobre Ciencia Geométrica de la Información (Anual).

Entre los objetivos de este proyecto también está buscar socios, tanto europeos como no europeos, para comenzar a trabajar en una red internacional (**OS1**).

De esta manera, a modo de resumen, la comunicación de los resultados en el ámbito científico se realizará a través de artículos que contengan los resultados publicados en **revistas de prestigio, seminarios, congresos y talleres**. Así, llegaremos a investigadores interesados en estos temas. Por supuesto, tal y como se especificó, todos los resultados se publicarán primero en arXiv y repositorios institucionales, para garantizar el libre acceso (independientemente de que se intentará publicar tantos artículos como sea posible en acceso abierto). En cuanto al público en general y en particular a los jóvenes estudiantes, proponemos varias acciones de divulgación, con conferencias, talleres y publicaciones, tanto en periódicos como en blogs.

# Bibliografía

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden. Foundations of Mechanics. AMS Chelsea publishing. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, Providence, 2008.
- [2] I. Agricola and T. Friedrich. Global Analysis, volume 52 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI.
- [3] R. Almeida and P. Molino. Suites d’Atiyah et feuilletages transversalement complets. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 300(1):13–15, 1985.
- [4] B. A. Bilby. Continuous distributions of dislocations. In Progress in solid mechanics, Vol. 1, pages 329–398. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960.
- [5] F. Bloom. Modern differential geometric techniques in the theory of continuous distributions of dislocations, volume 733 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1979.
- [6] H. Brandt. Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. Math. Ann., 96(1):360–366, 1927.
- [7] R. Brown. From groups to groupoids: a brief survey. Bulletin of the London Mathematical Society, 19(2):113–134, 03 1987.
- [8] C. M. Cámpo, M. Epstein, and M. de León. Functionally graded media. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 05(03):431–455, 2008.
- [9] A. Carotenuto, A. Cutolo, A. Petrillo, R. Fusco, C. Arra, M. Sansone, D. Larobina, L. Cardoso, and M. Fraldi. Growth and in vivo stresses traced through tumor mechanics enriched with predator-prey cells dynamics. Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 86:55–70, 2018.
- [10] A. Cauchy. Note sur l’équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides. C. R., 32:323–326, 1851.
- [11] M. de León, M. Epstein, and V. M. Jiménez. Material Geometry: Groupoids in Continuum Mechanics. World Scientific, Singapore, 2021.
- [12] J. P. Dufour and N. T. Zung. Poisson structures and their normal forms, volume 242 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

- [13] C. Ehresmann. Les prolongements d'une variété différentiable. V. Covariants différentiels et prolongements d'une structure infinitésimale. C. R. Acad. Sci. Paris, 234:1424–1425, 1952.
- [14] C. Ehresmann. sur les connexions d'ordre supérieur. In Dagli Atti del V Congresso dell'Unione Matematica Italiana, pages 344–346. 1956.
- [15] C. Ehresmann. Catégories topologiques et catégories différentiables. In Colloque Géom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958), pages 137–150. Centre Belge Rech. Math., Louvain, 1959.
- [16] C. Ehresmann. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. In Séminaire Bourbaki, Vol. 1, pages Exp. No. 24, 153–168. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [17] S. Eilenberg and S. MacLane. General theory of natural equivalences. Trans. Amer. Math. Soc., 58:231–294, 1945.
- [18] M. Elzanowski, M. Epstein, and J. Sniatycki.  $G$ -structures and material homogeneity. J. Elasticity, 23(2-3):167–180, 1990.
- [19] M. Epstein. Laminated uniformity and homogeneity. Mechanics Research Communications, 2017.
- [20] M. Epstein and M. de León. Homogeneity without uniformity: towards a mathematical theory of functionally graded materials. International Journal of Solids and Structures, 37(51):7577 – 7591, 2000.
- [21] M. Epstein and M. de León. Unified geometric formulation of material uniformity and evolution. Math. Mech. Complex Syst., 4(1):17–29, 2016.
- [22] M. Epstein and de M. León. Geometrical theory of uniform cosserat media. J. Geom. Phys., 26(1-2):127–170, 1998.
- [23] M. Epstein, V. M. Jiménez, and M. de León. Material geometry. Journal of Elasticity, 135(1):237–260, Apr 2019.
- [24] S. R. Eugster, F. dell'Isola, and D. J. Steigmann. Continuum theory for mechanical metamaterials with a cubic lattice substructure. Mathematics and Mechanics of Complex Systems, 7(1):75–98, 2019.
- [25] A. Fujimoto. Theory of  $G$ -structures. Study Group of Geometry, Department of Applied Mathematics, College of Liberal Arts and Science, Okayama University, Okayama, 1972. English edition, translated from the original Japanese, Publications of the Study Group of Geometry, Vol. 1.
- [26] M. W. Hirsch. Differential topology, volume 33 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

- [27] V. M. Jiménez and M. de León. The evolution equation: An application of groupoids to material evolution. Journal of Geometric Mechanics, 14(2):331–348, 2022.
- [28] V. M. Jiménez and M. de León. A geometric model for non-uniform processes of morphogenesis. Journal of Geometry and Physics, 186:104745, 2023.
- [29] V. M. Jiménez and M. de León. New notions of uniformity and homogeneity of Cosserat media. Journal of Mathematical Physics, 64(9):092901, 09 2023.
- [30] V. M. Jiménez, M. de León, and M. Epstein. Material distributions. Mathematics and Mechanics of Solids, 0(0):1081286517736922, 0.
- [31] V. M. Jiménez, M. de León, and M. Epstein. Characteristic distribution: An application to material bodies. Journal of Geometry and Physics, 127:19 – 31, 2018.
- [32] V. M. Jiménez, M. de León, and M. Epstein. Lie groupoids and algebroids applied to the study of uniformity and homogeneity of cosserat media. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 15(08):1830003, 2018.
- [33] V. M. Jiménez, M. de León, and M. Epstein. Lie groupoids and algebroids applied to the study of uniformity and homogeneity of material bodies. Journal of Geometric Mechanics, 11(3):301–324, 2019.
- [34] V. M. Jiménez, M. de León, and M. Epstein. On the homogeneity of non-uniform material bodies. Berlin, 2020 (to appear).
- [35] V. M. Jiménez, M. de León, and M. Epstein. Characteristic foliations of material evolution: from remodeling to aging. Mathematics and Mechanics of Solids, 27(11):2373 – 2403, 2022.
- [36] K. Kondo. Geometry of elastic deformation and incompatibility. 1:5–17, 1955.
- [37] A. Kriegl and P. W. Michor. The convenient setting of global analysis, volume 53 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [38] J. M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds, volume 218 of Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.
- [39] K. C. H. Mackenzie. Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, volume 124 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [40] K. C. H. Mackenzie. General theory of Lie groupoids and Lie algebroids, volume 213 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

- [41] W. Noll. On the continuity of the solid and fluid states. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1954. Thesis (Ph.D.)–Indiana University.
- [42] W. Noll. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. Arch. Rational Mech. Anal., 27:1–32, 1967/1968.
- [43] J. Pradines. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 263:A907–A910, 1966.
- [44] R. Segev. Forces and the existence of stresses in invariant continuum mechanics. Journal of Mathematical Physics, 27:163 – 170, 1986.
- [45] T. Shifrin. Multivariable Mathematics: Linear Algebra, Multivariable, Calculus, and Manifolds. Wiley.
- [46] P. Stefan. Accessible sets, orbits, and foliations with singularities. Proc. London Math. Soc. (3), 29:699–713, 1974.
- [47] H. J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Amer. Math. Soc., 180:171–188, 1973.
- [48] C. Truesdell and W. Noll. The non-linear field theories of mechanics. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004. Edited and with a preface by Stuart S. Antman.
- [49] A. J. S. Venant. Rapport sur un mémoire de mr. maurice lévy relatif à l'hydrodynamique des liquides homogènes à leur écoulement rectiligne et permanent. C. R. LXVIII, pages 582–590, 1869.
- [50] V. Volterra. Sur l'équilibre des corps élastiques multiples connexes. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), 24:401–517, 1907.
- [51] C. C. Wang. On the geometric structures of simple bodies. A mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. Arch. Rational Mech. Anal., 27:33–94, 1967/1968.
- [52] C. C. Wang and C. Truesdell. Introduction to rational elasticity. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids: Mechanics of Continua.