Proyecto docente presentado por Víctor Manuel Jiménez Morales para dar cumplimiento a la normativa que regula las pruebas del concurso de acceso a plazas de cuerpos docentes universitarios.

Universidad Nacional de Educación a Distancia, Resolución de X de X de 2026, publicada en el B.O.E. de X de X de X,

- **Número de Plaza:** 215.01
- **Categoría:** Profesor Titular de Universidad.
- **Área de Conocimiento:** Geometría y Topología.
- **Departamento:** Matemáticas Fundamentales.
- **Perfil Docente:** "Campos y Formas" (Grado en Matemáticas) y "Geometría Diferencial" (Máster en Matemáticas Avanzadas), con la metodología de la enseñanza a distancia.
- **Perfil Investigador:** Distribuciones y foliaciones en variedades diferenciables con aplicaciones a Mecánica.

8 de mayo de 2026

Índice general

Introducción

Este *proyecto docente* se desarrolla con una narrativa *conceptualmente descendente*, y se **divide en dos bloques** (capítulos) desde el marco más amplio (la educación universitaria a distancia como fenómeno histórico, institucional y metodológico en el primer capítulo) hasta el caso concreto de la asignatura *Campos y Formas (61023050)* del Grado en Matemáticas (en el segundo capítulo). Esta elección no responde a un criterio meramente expositivo, sino a una tesis de fondo: la metodología diseñada para la asignatura está altamente influenciada por su contexto; la UNED.

Con esa idea en mente, el documento progresa de lo general a lo particular. Se parte de los inicios de la educación a distancia, se discuten los modelos y retos de la misma, se atraviesan los marcos europeos y nacionales que estructuran la docencia universitaria, y se aterriza finalmente en la UNED como institución singular. Por otro lado, en el plano docente, el texto avanza desde la caracterización del estudiantado y de los recursos materiales y humanos (plataformas, centros, figuras docentes) hacia la concreción de una propuesta metodológica específica para la asignatura elegida en el segundo capítulo: *Campos y Formas*. Este recorrido se justifica por la necesidad de diseñar una docencia viable, rigurosa y humana para un alumnado real, en el entorno no presencial específico de la UNED.

El primer capítulo se incluye, por tanto, no como una mera introducción histórica, sino como una justificación del diseño de la asignatura. En un proyecto docente, cada decisión (qué materiales se proponen, qué tipo de evaluación se adopta, cómo se estructura el campus virtual, qué papel desempeña la tutoría, qué ritmo de trabajo se considera razonable,...) debe poder responder con precisión a una pregunta sencilla: *¿por qué esto es necesario aquí?* La respuesta, en general, se fundamentará en tres realidades estructurales propias de la UNED: **el modelo a distancia**, **el perfil del estudiante** y **la ecología de recursos** (virtuales, presenciales y humanos) que sostienen el aprendizaje.

En primer lugar, se aborda la educación universitaria a distancia, las causas y los problemas que motivaron su surgimiento. Antes de hablar de un curso específico, conviene delimitar el tipo de "*contrato didáctico*" que una institución a distancia impone y, al mismo tiempo, hace posible. Esta reflexión prepara el terreno para comprender por qué, más adelante, se otorgará un peso central a características como el material didáctico, la estructura del curso virtual o a la articulación de las tutorías.

En segundo lugar, se incorporan los marcos del *EEES* y de la normativa vigente (*LOSU*) porque operan como el *lenguaje común* en el que hoy se formulan titulaciones, competencias y resultados de aprendizaje. Incluso cuando se intenta evitar una exposición tediosa, conviene situar la asignatura en el escenario universitario contemporáneo: créditos ECTS, aseguramiento de la calidad conjunta,...

En tercer lugar, se presenta la UNED a partir de sus objetivos fundacionales y de su evolución porque esos objetivos no son solamente históricos: describen, en buena medida, el núcleo de la misión docente actual. Volver a ellos a lo largo del texto cumple una función argumentativa: permite mostrar que la metodología propuesta para *Campos y Formas* no es una innovación aislada, sino que está altamente influenciada por los objetivos y características propias de la UNED.

En cuarto lugar, se caracteriza al alumnado de la UNED porque toda metodología seria debería tener en cuenta al destinatario. Un estudiantado mayoritariamente adulto, con alta proporción de personas con empleo y con trayectorias vitales diversas, obliga a repensar el tiempo de estudio, el tipo de acompañamiento, y el valor del *feedback*. En quinto lugar, se describen los recursos docentes (en particular, el campus virtual y los centros asociados) y los recursos humanos (equipo docente, profesorado tutor y personal de apoyo) porque, en la UNED (como en cualquier otra universidad), el aprendizaje es indivisible de su infraestructura. La asignatura no ocurre únicamente en un temario: ocurre en foros, en guías, en repositorios de materiales, en tutorías, en centros asociados y en una coordinación docente distribuida. Por eso, antes de diseñar *Campos y Formas*, es necesario describir el ecosistema que hará posible la comunicación, el seguimiento y la evaluación del aprendizaje. En una última sección de este capítulo, se describe el grado de Matemáticas, puesto que es el grado en el que se desarrolla la asignatura objeto de este proyecto docente.

Finalmente, esta misma narrativa de lo general a lo particular aparece también en el siguiente capítulo, donde se presenta la asignatura propia del proyecto: *Campos y Formas*. El documento seguirá defendiendo una reorganización conceptual que comienza en el caso general (variedades diferenciables) para recuperar curvas y superficies como casos particulares, reforzando el valor del pensamiento abstracto y evitando que el estudio de las formas quede relegado a un final residual del curso. Así, la estructura global del proyecto docente y la estructura interna de la asignatura se espejan: ambas apuestan por un recorrido de lo general a lo particular.

De esta manera, en el segundo capítulo el presente proyecto docente desciende ahora al nivel concreto de la asignatura de Campos y formas, y aborda el diseño efectivo de la asignatura, entendida como una unidad académica en la que confluyen las decisiones pedagógicas, metodológicas y organizativas discutidas previamente.

En primer lugar, se presenta su ubicación dentro del plan de estudios del Grado en Matemáticas, así como su relación con otras materias del programa. A continuación, se describen las competencias y resultados de aprendizaje que se persiguen, junto con la bibliografía básica y complementaria que sustenta el desarrollo del curso. Posteriormente, se analizan los fundamentos metodológicos que orientan el proceso de enseñanza–aprendizaje definido para la asignatura, incluyendo la organización del curso virtual, el papel de las tutorías y el sistema de evaluación.

La siguiente sección del tema está dedicada a las innovaciones docentes implementadas o previstas en el desarrollo de la asignatura. Estas innovaciones se apoyan principalmente en el diseño del texto base, en la integración de recursos digitales y en el uso de herramientas tecnológicas orientadas a favorecer el aprendizaje autónomo del estudiantado. En consonancia con el modelo educativo de la UNED, dichas estrategias buscan reforzar el papel del material didáctico como eje vertebrador del aprendizaje, complementándolo con mecanismos de acompañamiento, retroalimentación y seguimiento continuo.

Finalmente, el tema concluye con la presentación detallada del contenido matemático de la asignatura. Esta organización responde a una propuesta conceptual que introduce de forma temprana el lenguaje de las variedades diferenciables para, desde ese marco general, recuperar curvas y superficies como casos particulares. Con ello se pretende favorecer una comprensión más estructurada del cálculo diferencial e integral en variedades, culminando en el estudio del teorema de Stokes y de algunas de sus aplicaciones fundamentales.

Se entiende que plasmar en este proyecto docente el texto completo de la asignatura carece de sentido, puesto que este ya se desarrolló en [13], que es el texto base. Así, de los tres temas y dos apéndices, se presentará detalladamente el primero (introducción al concepto de variedades diferenciales), justificando y señalando las innovaciones presentadas para el beneficio del estudiante. El resto de temas se presentarán de forma resumida, limitándonos únicamente a presentar lo imprescindible, describir la estructura y defender la coherencia narrativa de cada tema. Finalmente, se presentará la estructura general de los dos apéndices que, aunque no es contenido evaluable de la asignatura, estarán a disposición de los estudiantes como apoyo motivacional del contenido de la asignatura.

Recurso visual que muestra la estructura y coherencia global del proyecto docente, así como su interconexión a través de *diagramas de Venn*.

Capítulo 1

Contexto propio de la UNED: De los orígenes de la enseñanza a distancia a la UNED

1.1. Educación universitaria a distancia

La educación a distancia tiene sus orígenes en el siglo XIX, cuando las primeras formas de educación por correspondencia aparecieron en Europa y América del Norte. En 1840, Sir Isaac Pitman comenzó a ofrecer cursos de taquigrafía por correspondencia en Inglaterra, lo que se considera *una de las primeras experiencias formales de educación a distancia.* Durante el final del siglo XIX y principios del siglo XX, el crecimiento de la educación a distancia mediante el correo postal fue un fenómeno particularmente significativo en países industrializados como Estados Unidos, Reino Unido y Alemania. Esta modalidad formativa, conocida en sus inicios como "*instrucción por correspondencia*", fue impulsada por la necesidad de satisfacer la demanda de formación profesional y técnica para personas que no podían acceder a la educación presencial, ya sea por cuestiones geográficas, económicas o laborales.

Uno de los primeros ejemplos de éxito en la educación por correspondencia fueron las *International Correspondence Schools (ICS)*, fundadas en 1890 en Scranton, Pennsylvania, por Thomas J. Foster. ICS ofrecía formación técnica a trabajadores de minas y fábricas, enseñándoles temas prácticos como ingeniería, minería, mecánica y contabilidad. *Este enfoque práctico estaba diseñado para mejorar las oportunidades laborales de los trabajadores en un contexto de creciente industrialización.* Con el uso de manuales enviados por correo y un sistema de evaluación a distancia, los estudiantes podían avanzar en sus estudios de manera flexible, sin la necesidad de abandonar sus empleos o trasladarse a centros urbanos.

De manera similar, en Reino Unido, la *University Correspondence College*, fundada por William Briggs en 1887, fue una institución pionera en ofrecer educación a distancia por medio del correo, especialmente para aquellos interesados en preparar exámenes universitarios. Esta institución jugó un papel crucial en la democratización de la educación superior, lo que permitió que personas de distintos contextos socioeconómicos accedieran a una formación formal sin necesidad de asistir físicamente a una universidad. En Alemania, durante las primeras décadas del siglo XX, se desarrollaron también diversas iniciativas para ofrecer cursos por correspondencia en áreas como la enseñanza comercial y la administración, en respuesta a la creciente necesidad de trabajadores cualificados en la economía industrial emergente. Es notable que estas iniciativas estaban enfocadas principalmente en la enseñanza de habilidades prácticas o técnicas, y no se consideraban estrictamente "*universitarias*", pero acabaron sentando las bases para lo que más tarde se convertiría en la educación universitaria a distancia, ya que establecieron algunos de los principios y retos fundamentales de esta modalidad: *Acceso flexible al conocimiento*, *autonomía del estudiante*, *materiales pedagógicos específicos* y *evaluación a distancia.*

El desarrollo de los medios de comunicación de masas en el siglo XX, como la radio y la televisión, jugó un papel crucial en la evolución de la educación a distancia, lo que posibilitó formas de enseñanza más interactivas y masivas. A medida que estos medios se fueron popularizando en las primeras décadas del siglo, las instituciones educativas comenzaron a utilizarlos como plataformas para llegar a un público mucho más amplio, rompiendo las barreras geográficas y temporales que limitaban el acceso a la educación.

Uno de los primeros medios en aprovecharse para la educación a distancia fue la radio, que se había popularizado en los años 20 y 30. Al principio, las emisoras de radio comenzaron a transmitir programas educativos que consistían en clases, conferencias y series educativas que llegaban a personas que no podían acceder a las aulas tradicionales. La *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)* en México fue una de las instituciones pioneras en el uso de la radio con fines educativos, lanzando transmisiones educativas en 1937. Estos programas estaban dirigidos a un público amplio y ofrecían contenido educativo en una variedad de áreas que, en este punto, ya no eran únicamente técnicas, como literatura, historia, ciencias y *matemáticas*, con el fin principal de *mejorar el acceso a la educación para personas de áreas rurales y urbanas marginadas.*

En Reino Unido, la *BBC (British Broadcasting Corporation)* también jugó un papel central en la expansión de la educación a distancia mediante la transmisión de programas educativos por radio. El objetivo era, de nuevo, ofrecer una educación continua a quienes ya no estaban en el sistema educativo formal, o a aquellos que nunca habían tenido acceso a él.

Posteriormente, la llegada de la televisión en las décadas de los 50 y 60 amplió aún más las posibilidades de la educación a distancia. A diferencia de la radio, la televisión ofrecía un medio visual, que enriquecía las experiencias de aprendizaje y permitía enseñar conceptos complejos con imágenes, diagramas y demostraciones en tiempo real. En algunos países, como Estados Unidos, la *televisión educativa* se convirtió en una herramienta clave para proporcionar contenidos tanto a nivel escolar como universitario. En América Latina, países como México y Brasil también adoptaron la televisión como un recurso educativo, con la *Telesecundaria* en México, creada en 1968, siendo un ejemplo emblemático de cómo la televisión se utilizó para llevar educación a zonas rurales.

En lo relativo al sistema universitario, el punto de inflexión llegó en 1969, con la creación de la *Open University*, la cual marcó un hito en la historia de la educación a distancia, especialmente a nivel universitario. La Open University fue una de las primeras instituciones de educación superior diseñada específicamente para proporcionar una educación a distancia integral, aprovechando una variedad de medios de comunicación para hacerlo. La universidad fue fundada con el propósito de ofrecer una alternativa accesible y flexible a la educación universitaria tradicional, y para ello implementó un enfoque educativo innovador que combinaba varios métodos:

1) **Materiales impresos:** Los estudiantes recibían libros, guías de estudio y

manuales detallados, que eran diseñados específicamente para su uso autónomo. Estos materiales proporcionaban la base teórica de los cursos.

2) **Televisión y radio:** La BBC, en colaboración con la Open University, transmitía programas educativos que complementaban el material impreso. Estos programas no solo ofrecían clases magistrales, sino también demostraciones y experimentos visuales que ayudaban a ilustrar conceptos complejos, haciendo que la experiencia educativa fuera más accesible e interactiva.

3) **Tutorías locales y correspondencia:** Además de los medios masivos, los estudiantes podían participar en tutorías locales, donde se reunían con tutores para discutir el contenido de los cursos y resolver dudas. Además, la correspondencia postal jugaba un papel clave en la evaluación, ya que los estudiantes enviaban sus trabajos por correo para ser revisados por los profesores.

El modelo educativo de la Open University no solo amplió considerablemente el acceso a la educación superior, sino que también lo hizo accesible para personas que, por razones geográficas, económicas o laborales, no podían asistir a una universidad presencial. Esto incluyó a personas con discapacidad, trabajadores a tiempo completo, personas dedicadas al trabajo doméstico (*amos/as de casa*) y adultos mayores que deseaban continuar sus estudios. La Open University fue revolucionaria en su capacidad para ofrecer educación universitaria a gran escala, con más de 50.000 estudiantes inscritos en sus primeros años de funcionamiento.

El éxito de la Open University inspiró la creación de instituciones similares en otros países, marcando un punto de inflexión en la educación a distancia a nivel global. Países como Canadá, Australia, India, Sudáfrica y *la misma España, con la UNED,* siguieron el ejemplo, creando sus propias universidades abiertas, que utilizaron medios de comunicación como la televisión y más tarde Internet para impartir cursos universitarios. Estas instituciones ayudaron a democratizar aún más el acceso a la educación superior, especialmente en regiones en desarrollo o áreas geográficamente aisladas. Se puede, de hecho, observar con claridad cómo esta universidad influyó en la creación de la UNED, tanto en estructura como en objetivos.

El modelo de la Open University también influyó en las universidades tradicionales, muchas de las cuales comenzaron a ofrecer programas a distancia, empleando los mismos medios de comunicación masiva para llegar a nuevos estudiantes. Este cambio estructural en la educación superior fue un precursor directo del crecimiento explosivo de la educación en línea en las últimas décadas, a medida que las universidades comenzaron a trasladar sus programas a plataformas digitales.

El advenimiento de Internet en los años 90 y la masificación de los ordenadores personales marcaron el comienzo de una nueva era en la educación a distancia. Las universidades en línea y los cursos en línea masivos y abiertos *(MOOC)* emergieron en la década de 2000, expandiendo aún más el acceso a la educación superior. Instituciones como *Coursera, edX* y *Khan Academy* popularizaron el aprendizaje en línea y democratizaron el acceso a cursos de universidades de renombre mundial.

La enseñanza universitaria a distancia se caracteriza por una serie de elementos que deben tenerse en cuenta al plantear cualquier tipo de metodología. Como principales ventajas podemos señalar las siguientes:

1) **Accesibilidad y flexibilidad:** La educación a distancia elimina las barreras geográficas, lo que permite a los estudiantes acceder a programas de universidades que de otro modo estarían fuera de su alcance. Además, ofrece flexibilidad horaria, lo que es especialmente valioso para estudiantes que trabajan, tienen responsabilidades familiares o viven en regiones remotas.

2) **Costes reducidos:** Aunque no siempre es el caso, en muchas instituciones a distancia, y en particular en la UNED, la educación a distancia es menos costosa en comparación con la educación presencial, tanto en términos de matrícula como de costes indirectos (como el transporte o la vivienda).

3) **Diversidad de recursos y metodologías:** El uso de plataformas digitales permite el acceso a una gran variedad de recursos educativos (videos, simulaciones, bibliotecas virtuales, foros, etc.), que pueden enriquecer el aprendizaje.

4) **Inclusión de estudiantes "*no tradicionales*":** La modalidad a distancia ha permitido la inclusión de grupos históricamente marginados en la educación superior, como personas con discapacidades, adultos mayores y estudiantes de bajos ingresos. También facilita la educación para quienes buscan una segunda carrera o desean actualizar sus conocimientos profesionales.

A pesar de sus numerosas ventajas, esta modalidad también presenta varios desafíos:

1) **Desigualdad en el acceso a la tecnología:** Aunque Internet y las tecnologías digitales han sido claves en el desarrollo de la educación a distancia, la desigualdad en el acceso a la tecnología sigue siendo un problema. En muchas zonas, especialmente en países en desarrollo, el acceso a Internet de calidad y dispositivos adecuados sigue siendo limitado, lo que impide que muchos estudiantes aprovechen plenamente esta modalidad.

2) **Falta de interacción social:** Uno de los principales desafíos pedagógicos es la falta de interacción cara a cara entre estudiantes y profesores, lo que puede afectar la experiencia educativa. Las discusiones en el aula, el trabajo en equipo presencial y la relación personal con los docentes son difíciles de replicar en entornos virtuales.

3) **Autodisciplina y motivación:** Los estudiantes de educación a distancia deben ser especialmente autodisciplinados y motivados para completar sus estudios, ya

que no tienen la misma estructura que en un entorno presencial. La tasa de deserción en programas a distancia suele ser más alta que en los programas presenciales, en parte por la dificultad de mantener la motivación sin el apoyo directo de un entorno académico físico.

4) **Problemas de acreditación y reconocimiento:** Aunque no es el caso de la UNED, en algunos países, la educación a distancia aún enfrenta problemas de acreditación y reconocimiento.

En base a estas características, es fundamental entender que el rol de un profesor de una universidad a distancia no es exactamente el mismo que el de su homólogo en una universidad presencial. Un docente de una universidad a distancia enfrenta desafíos y oportunidades diferentes en comparación con la enseñanza presencial, por lo que debe poseer una combinación de habilidades pedagógicas, tecnológicas y de comunicación adaptadas a este contexto. Aunque desarrollaremos con más detalle estos puntos en el apartado correspondiente de la UNED, a continuación se describen algunas características clave que un docente de una universidad a distancia debería tener:

1) **Dominio de las tecnologías educativas:** En la enseñanza a distancia, el uso de herramientas tecnológicas es fundamental para el éxito del proceso educativo.

2) **Habilidades de comunicación efectiva:** La comunicación en entornos a distancia puede ser menos fluida que en la enseñanza presencial, por lo que un docente debe ser *claro y conciso* en la explicación de conceptos y las instrucciones para las actividades y evaluaciones, *estar disponible* para responder preguntas de manera rápida y precisa, utilizando varios canales (correo electrónico, foros de discusión, mensajería en la plataforma), y *desarrollar cierta empatía y comprensión*, ya que los estudiantes a menudo se sienten aislados o desconectados.

3) **Capacidad para fomentar la autonomía y el aprendizaje autodirigido:** Uno de los principios fundamentales de la educación a distancia es que los estudiantes deben aprender de manera más independiente. Así pues, resulta crucial que un docente de universidad a distancia *enseñe y fomente estrategias de aprendizaje autónomo*, *motive a los estudiantes a ser responsables de su propio aprendizaje* y *proporcione retroalimentación* constante al alumnado.

4) **Flexibilidad y adaptabilidad:** Los estudiantes a distancia suelen tener diferentes circunstancias personales y laborales que pueden afectar su participación en el curso.

5) **Dominio pedagógico en entornos virtuales:** La enseñanza en línea requiere métodos pedagógicos que difieren de la enseñanza tradicional.

6) **Planificación y organización rigurosa:** El éxito de un curso a distancia depende en gran medida de la organización del contenido y de las expectativas claras.

7) **Paciencia y tolerancia a la frustración:** El aprendizaje a distancia puede implicar problemas técnicos, barreras de comunicación y desafíos para los estudiantes.

8) **Compromiso con la mejora continua:** Este modelo educativo está en constante evolución, por lo que un docente debe actualizarse constantemente, tanto en materia pedagógica como en materia tecnológica y digital.

Como se ha señalado previamente, la evolución de la enseñanza a distancia ha estado históricamente ligada a la evolución tecnológica (desde la correspondencia al uso de televisores e internet) y, por lo tanto, es evidente que su futuro deberá estar altamente influenciado por dichos avances tecnológicos y pedagógicos. Así pues, podría resultar beneficioso preguntarse qué posibles avances podrían afectar a la educación a distancia en el futuro:

1) **Educación basada en inteligencia artificial (IA):** Con independencia de las valoraciones personales, la IA ha llegado para quedarse, y está comenzando a tener un impacto significativo en la educación. En el futuro, los sistemas de IA podrían ofrecer recursos como *tutorías personalizadas, ajuste del contenido al ritmo de aprendizaje y a las necesidades individuales de los estudiantes.* De hecho, los chatbots educativos y los sistemas de evaluación automatizada ya están siendo utilizados en algunas plataformas. *El proyecto docente aquí presentado pretende desarrollar un uso específico para esta tecnología relacionado con el material obligatorio* (véase la subsección 2.10.6).

2) **Realidad virtual (RV) y realidad aumentada (RA):** El uso de RV y RA promete revolucionar la educación a distancia, proporcionando experiencias inmersivas que pueden simular entornos de aprendizaje en tiempo real. Esto podría ser especialmente útil en campos que requieren un alto nivel de interacción práctica, como la medicina, la ingeniería o las ciencias experimentales. De hecho, *este proyecto docente ya incluye el uso de estas herramientas en el aula* (véase la subsección 2.10.6).

3) **Aprendizaje adaptativo y *big data*:** El aprendizaje adaptativo, basado en el análisis de grandes cantidades de datos (*big data*), podría permitir a las instituciones crear trayectorias de aprendizaje personalizadas para los estudiantes.

4) **Inclusión y equidad:** A medida que la tecnología se vuelve más accesible a nivel mundial, es probable que la educación a distancia contribuya a reducir las brechas educativas entre diferentes grupos socioeconómicos. El desarrollo de infraestructuras digitales inclusivas y programas específicos para poblaciones vulnerables será un área clave de avance.

5) **Interdisciplinariedad y microcredenciales:** El futuro, y presente, de la educación universitaria a distancia también podría estar marcado por el auge de los programas interdisciplinarios y las microcredenciales, que permitirán a los estudiantes adquirir habilidades específicas sin necesidad de completar un grado

completo. Es resaltable que, de hecho, en la UNED ya se está promoviendo la creación de microtítulos y grados multidisciplinares.

Aparte de la UNED, de la que hablaremos más extensamente, existen otros centros de educación superior a distancia en España, todos ellos dotados de financiación exclusivamente privada:

- Universidad Oberta de Catalunya, fundada en 1995, contó en el curso[1] 2022/2023 con 87.150 estudiantes distribuidos en 28 grados, 54 másteres universitarios y 9 programas de doctorado. Ninguno de ellos en ciencias (Matemáticas, Físicas, Química, Biología o Geología).

  La UOC, aun siendo de gestión privada, forma parte de la Asociación Catalana de Universidades Públicas y está parcialmente financiada por la Generalitat de Cataluña. Forma parte del sistema universitario de Cataluña y del sistema universitario español. Las titulaciones que ofrece son oficiales y están avaladas por la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA).

- Universidad Internacional de la Rioja, inició su actividad académica en 2009, tras la autorización otorgada por el Decreto 69/2009, de 31 de julio, y el reconocimiento por la Ley 3/2008, de 13 de octubre, del Parlamento de La Rioja. Se rige por la Ley de Ordenación Universitaria española. A finales de 2022 contaba con más de 55.000 estudiantes en estudios oficiales repartidos en 53 grados y más de 190 másteres. La financiación es 100 % privada. Aproximadamente, el 32 % del alumnado es extranjero, principalmente de Suramérica, y entre los cuales predomina el alumnado de Colombia (44,9 %) y el de Ecuador (33,3 %). Cuenta con un grado en Matemática Computacional, un grado en Ciencia de Datos y un grado en Física.

- Universidad Internacional de Valencia, fundada en 2009. Cuenta en el curso 2023/2024 con unos 26.500 estudiantes de 87 nacionalidades diferentes distribuidos en 15 títulos de grado y 80 posgrados. En 2013, la Generalitat Valenciana vendió el 70 % de la sociedad al Grupo Planeta, que se hizo cargo de su gestión y administración. Entre los grados que ofrece se encuentran el Grado en Matemáticas, con dos menciones: Matemática Computacional y Matemática Financiera, o el Grado en Física.

- Universidad a Distancia de Madrid, fundada en 2006, forma parte del grupo CEF.- UDIMA, creado en 1977 como Centro de Estudios Financieros. Se inauguró con cinco títulos de grado: Derecho, Administración y Dirección de Empresas, Ciencias del Trabajo y Recursos Humanos, Psicología y Turismo. Según los datos oficiales de la universidad, en el curso 2022/2023 hubo 8.774 alumnos/as en titulaciones oficiales distribuidos en 17 títulos de grado, 34 másteres universitarios, 18 másteres profesionales y 2 programas de doctorado.

[1] El último curso del que se dispone de estadísticas en la web de la propia universidad.

Ninguno de ellos en ciencias (Matemáticas, Físicas, Química, Biología o Geología). La UDM posee una financiación 100 % privada.

- Universidad Isabel I, fundada en 2008 y con sede central en Burgos, cuenta con una sede en Valladolid y otra en Miranda de Ebro. La oferta docente consta de 13 títulos de grado y 18 másteres oficiales. Ninguno de los estudios ofertados es en Ciencias (Matemáticas, Físicas, Química, Biología o Geología). Según datos de la propia universidad, durante el curso académico 2022/2023 contaba con cerca de 4.500 estudiantes de titulaciones oficiales: 2.285 alumnos/as de grado y 2.184 alumnos/as de máster. Esta universidad se financia exclusivamente con fondos privados.

1.2. Espacio Europeo de Educación Superior (EEES)

El *Espacio Europeo de Educación Superior*, en adelante *EEES*, es una iniciativa que tiene como objetivo principal armonizar y reforzar la colaboración entre las instituciones de educación superior de los países europeos. Nacido en el marco del Proceso de Bolonia, iniciado con la Declaración de Bolonia en 1999, el EEES busca promover la convergencia de los sistemas educativos europeos, facilitando la movilidad académica, la cooperación transnacional y la competitividad internacional.

Uno de los pilares fundamentales del EEES es la creación de un sistema comparable y transparente de títulos académicos, mediante la adopción de estructuras comunes basadas en tres ciclos: grado, máster y doctorado. Esta unificación permite una mayor claridad y reconocimiento mutuo de las cualificaciones, facilitando tanto la movilidad de estudiantes y profesores como el acceso al mercado laboral dentro de Europa.

Además, el EEES enfatiza la importancia de mejorar la calidad de la educación superior mediante el establecimiento de mecanismos de garantía de calidad y la promoción de principios de equidad y accesibilidad. El sistema de créditos ECTS (Sistema Europeo de Transferencia y Acumulación de Créditos) es una de las herramientas clave implementadas para asegurar la transferencia efectiva de créditos académicos entre instituciones.

Otro aspecto central del EEES es la promoción de la dimensión social de la educación superior, incentivando la participación de estudiantes de diversos contextos socioeconómicos y mejorando la inclusión. También, se fomenta el aprendizaje a lo largo de la vida, buscando una mayor flexibilidad en los programas académicos que responda a las demandas cambiantes de la sociedad y del mercado laboral.

El EEES no solo se limita a los países de la Unión Europea, sino que incluye a un amplio grupo de países adheridos, con el propósito de fortalecer la cooperación y el entendimiento mutuo a nivel continental. A través de esta plataforma, el EEES contribuye a la creación de una Europa del conocimiento, promoviendo el desarrollo académico y la innovación como motores de progreso social y económico.

De este modo, el EEES constituye un marco integral para la modernización de la educación superior en Europa, con una visión compartida orientada a la excelencia académica, la inclusión y la cooperación internacional.

Regulación vigente en España

En España, la adopción de este sistema ha requerido una serie de reformas y actualizaciones legislativas, que han sido implementadas gradualmente desde el inicio del proceso de Bolonia en 1999.

La regulación vigente que afecta al EEES en España se articula a través de varios decretos, leyes y disposiciones normativas, que han consolidado los objetivos de Bolonia en el sistema universitario español. Estas normas no solo estructuran las enseñanzas universitarias en grados, másteres y doctorados, sino que también establecen los sistemas de evaluación de la calidad, los créditos ECTS, la movilidad y el reconocimiento de títulos a nivel internacional. A continuación, se describe un resumen de las principales disposiciones normativas que conforman este marco regulador:

1. *Ley Orgánica 2/2023, del Sistema Universitario (LOSU)* (véase la siguiente sección).

2. *Real Decreto 1125/2003, por el que se establece el sistema de créditos ECTS*

   Este decreto fue clave en la implementación del EEES, ya que introdujo el *Sistema de Créditos Europeos ECTS (European Credit Transfer and accumulation System)*, que mide el trabajo del estudiante en términos de horas de estudio, facilitando la movilidad y el reconocimiento de titulaciones entre universidades europeas.

3. *Real Decreto 1393/2007, de ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales*

   El Real Decreto 1393/2007 constituye uno de los pilares fundamentales para la adaptación del sistema universitario español al EEES. Estableció la estructura de las enseñanzas universitarias en tres ciclos: Grado, Máster y Doctorado, en línea con los principios de Bolonia. También estableció directrices para la evaluación de la calidad de los programas y el fomento de la empleabilidad de los graduados.

4. *Real Decreto 861/2010, por el que se modifica el Real Decreto 1393/2007*

   Esta modificación del R.D. 1393/2007 introdujo mejoras en los procesos de acreditación de programas, así como en los sistemas de movilidad y reconocimiento de créditos, garantizando que los títulos obtenidos en España sean fácilmente comparables con los de otros países del EEES.

5. *Real Decreto 967/2014, sobre el reconocimiento de títulos extranjeros*

   Este decreto establece los procedimientos para el *reconocimiento y homologación* de títulos obtenidos en el extranjero, garantizando que los estudios realizados en otros países del EEES puedan ser reconocidos en España sin mayores trámites.

6. *Real Decreto 822/2021, de organización de las enseñanzas universitarias y aseguramiento de la calidad*

   El Real Decreto 822/2021 actualiza y moderniza la normativa anterior, reemplazando al Real Decreto 1393/2007. Refuerza la estructura de los tres ciclos (Grado, Máster, Doctorado), ratifica el uso del sistema ECTS, y pone un énfasis renovado en la *calidad educativa* y la *movilidad internacional*. Establece también nuevas medidas para asegurar que los programas universitarios estén alineados con las demandas del mercado laboral, promoviendo así la empleabilidad de los graduados. Además, este decreto subraya la importancia de la *dimensión social de la educación superior*, buscando garantizar la igualdad de oportunidades en el acceso a la universidad.

7. *Otras normas complementarias*

   Existen además otras leyes y decretos que, si bien no están exclusivamente dedicados a la adaptación al EEES, juegan un papel importante en la promoción de sus principios. Entre ellas, se pueden destacar:

   - *Real Decreto 592/2014*, que regula las prácticas académicas externas de los estudiantes universitarios.
   - *Real Decreto 1791/2010*, que establece el Estatuto del Estudiante Universitario.
   - *Ley Orgánica 4/2007*, que modificó la Ley Orgánica de Universidades, introduciendo medidas de gobernanza y calidad en línea con el EEES.

   Por último, es importante destacar la importancia de la **ANECA**, que juega un papel crucial en la regulación del sistema universitario español dentro del EEES, siendo responsable de los procesos de evaluación, acreditación y certificación de la calidad de los programas universitarios. Esta agencia opera bajo los estándares y directrices de aseguramiento de la calidad en el EEES (*European Standards and Guidelines*), promoviendo la mejora continua en las universidades españolas.

1.3. Ley Orgánica 2/2023, del Sistema Universitario (LOSU)

La educación superior en España ha experimentado una evolución significativa en las últimas décadas, impulsada por la necesidad de adaptarse a los desafíos del mundo contemporáneo y al contexto del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES, véase sección 1.2). En este marco, *la Ley Orgánica 2/2023, del Sistema*

Universitario, en adelante LOSU, emerge como un hito legislativo que busca reformar y modernizar el sistema universitario español. Esta ley, promulgada el 21 de diciembre de 2023, deroga la anterior *Ley Orgánica 6/2001, de Universidades (LOU)*, y establece un nuevo paradigma en la organización, gestión y evaluación de las instituciones de educación superior en España.

La LOSU se articula en torno a principios fundamentales que responden a las demandas de un sistema educativo en constante transformación. Entre estos principios destacan la autonomía universitaria, la inclusión, la igualdad de oportunidades, la calidad educativa y la movilidad internacional. La ley introduce un enfoque integral que busca no solo mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje, sino también garantizar que los títulos obtenidos sean reconocidos y valorados a nivel nacional e internacional.

Uno de los aspectos más relevantes de la LOSU es su fuerte énfasis en el aseguramiento de la calidad. La ley establece mecanismos claros para la evaluación, acreditación y supervisión de las titulaciones, promoviendo así un marco de transparencia y responsabilidad en la gestión académica. Esta preocupación por la calidad se enmarca dentro de las directrices del EEES, que promueve la homologación de sistemas educativos en toda Europa y la movilidad de estudiantes y profesionales.

Adicionalmente, la LOSU aborda la gobernanza de las universidades, estableciendo un nuevo modelo que promueve la participación de la comunidad universitaria en la toma de decisiones. Este enfoque participativo busca fortalecer la autonomía de las universidades, permitiéndoles adaptarse a las necesidades específicas de su entorno social y económico.

Por medio de estas reformas, la Ley Orgánica 2/2023 aspira a consolidar un sistema universitario español más dinámico, inclusivo y de calidad, alineado con las mejores prácticas internacionales y preparado para afrontar los retos del futuro. La implementación efectiva de la LOSU es fundamental para garantizar que las universidades españolas se posicionen como actores clave en el ámbito educativo europeo y global, contribuyendo al desarrollo sostenible y al bienestar de la sociedad en su conjunto.

Objetivos del EEES

1. **Adopción de un sistema de titulaciones comparable**

   El *Real Decreto 822/2021* mantiene y refuerza el sistema de grados, másteres y doctorados, con estructuras claras y comparables dentro del EEES, garantizando que los títulos en España sean reconocibles y comprendidos a nivel europeo. De hecho, en el artículo 3, se estructuran las enseñanzas universitarias. Aquí se especifica que las enseñanzas universitarias oficiales se organizan en tres ciclos, en correspondencia con los ciclos del Espacio Europeo de Educación Superior:

grado, máster y doctorado.

Los títulos de estudios oficiales universitarios tienen validez en todo el EEES, en el que actualmente se integran, además de los 27 países miembros de la UE, otros como Rusia y Turquía, hasta un total de 49 países. Asimismo, el artículo 3, párrafo 3 de dicho Real Decreto establece que,

"*Todos los títulos universitarios oficiales de Grado y de Máster Universitario deberán adscribirse a uno de los ámbitos del conocimiento...*"

Los ámbitos citados se listan en el anexo de dicho Real Decreto, entre ellos, se encuentra el de "*Matemáticas y Estadística*". Se continúa en el artículo 5, párrafo 2, estableciendo el número de créditos por curso, a saber, 60 créditos, excepto en aquellos másteres de 90 créditos donde se permite que uno de los cursos sea de 30 créditos.

Una característica fundamental de esta uniformidad se basa en la **estructura basada en tres ciclos: Grado, Máster y Doctorado.**

El decreto define con claridad la estructura de los tres ciclos del EEES y establece las competencias, resultados de aprendizaje y requisitos que cada uno de ellos debe cumplir. De nuevo, en el artículo 8 del Real Decreto 822/2021 se especifican los tres ciclos de grado, máster y doctorado. Las enseñanzas universitarias oficiales se organizan en tres ciclos, siendo el primero el grado, el segundo el máster y el tercero el doctorado. Cada uno de ellos tiene definidos objetivos específicos y competencias que se ajustan a los descriptores del Marco Español de Cualificaciones para la Educación Superior (MECES), conforme a las directrices del EEES.

2. **Establecimiento de un sistema de créditos (ECTS).**

   El sistema ECTS sigue siendo un pilar en la organización de los estudios universitarios en España bajo el EEES, y el decreto confirma su uso como base para la planificación de los estudios y la movilidad de los estudiantes. En el Real Decreto 1125/2003, se cita:

   "*Artículo 4. El número mínimo de horas, por crédito, será de 25, y el número máximo, de 30.*"

   Por otro lado, en el Real Decreto 822/2021 se especifica,

   "*Artículo 5. El plan de estudios en las enseñanzas de Grado y de Máster Universitario se estructura en cursos de 60 créditos académicos del Sistema Europeo de Transferencia de Créditos (ECTS, en sus siglas en inglés),* *secuenciándose desde el primer hasta el último curso, hasta cumplir la totalidad de créditos que definen el título. Se exceptúa de esta regla a aquellos másteres que tengan un plan de estudios con una carga total de 90 créditos, permitiéndose en tal caso que uno de los cursos sea de 30 créditos.*"

Así, este sistema de crédito pretende servir como herramienta para *cuantificar* y *homogeneizar* la adquisición de conocimientos y competencias en cada uno de los planes de estudios.

3. **Promoción de la movilidad de estudiantes, profesores y personal administrativo.**

   De nuevo, el Real Decreto 822/2021 reafirma la importancia de la movilidad académica en el contexto del EEES y promueve mecanismos para facilitar el reconocimiento de estudios y la cooperación internacional.

   "*Artículo 10. Los procedimientos de reconocimiento y de transferencia de créditos académicos en los títulos universitarios oficiales tienen por objeto facilitar la movilidad del estudiantado entre títulos universitarios oficiales españoles, así como entre estos y los títulos universitarios extranjeros. Las universidades aprobarán normativas específicas para regular estos procedimientos conforme a lo dispuesto en el presente real decreto.*"

   Este tipo de medidas cobran una gran importancia en el marco de creación de una comunidad académica europea cohesionada, con mayor capacidad de afrontar los desafíos globales contemporáneos.

4. **Promoción de la cooperación en garantía de calidad.**

   El decreto pone énfasis en la calidad educativa, estableciendo que las universidades deben someterse a procesos de evaluación y acreditación a través de agencias como la ANECA, en conformidad con las directrices del EEES. En el Real Decreto 822/2021, se clarifica que las enseñanzas universitarias oficiales se someterán a procedimientos de evaluación y acreditación para garantizar su calidad, en conformidad con las normativas del Espacio Europeo de Educación Superior.

5. **Promoción de la dimensión social de la educación superior.**

   El Real Decreto 822/2021 también aborda la dimensión social de la educación superior, promoviendo la equidad y el acceso a la universidad para todos los grupos sociales, incluyendo la flexibilización de la entrada para estudiantes "*no tradicionales*". Real Decreto 822/2021, de 28 de septiembre:

   "*Artículo 4. El respeto a la igualdad de género atendiendo a lo establecido en la Ley Orgánica 3/2007, de 22 de marzo, para la igualdad efectiva de mujeres y de hombres, y al principio de igualdad de trato y no discriminación por razón de nacimiento, origen nacional o étnico, religión, convicción u opinión, edad,* *discapacidad, orientación sexual, identidad o expresión de género, características sexuales, enfermedad, situación socioeconómica o cualquier otra condición o circunstancia personal o social.*"

6. **Aumentar la dimensión europea en la educación superior**

   Estrechamente relacionado con el punto de movilidad, se subraya la importancia de la dimensión europea, fomentando la creación de programas conjuntos y alianzas estratégicas con otras universidades europeas. En la "**disposición adicional sexta.** *Titulaciones universitarias conjuntas internacionales*", la "**disposición adicional séptima.** *Titulaciones universitarias conjuntas internacionales en el marco del Programa de Universidades Europeas de la Comisión Europea*", y la "**disposición adicional octava.** *Procedimiento de verificación y de renovación de la acreditación de titulaciones universitarias conjuntas internacionales Erasmus Mundus*", se detallan el proceso de creación, la composición y los sistemas de verificación sujetos a la creación de titulaciones conjuntas.

   La construcción de una comunidad académica europea con una mayor cohesión resulta una herramienta útil para aumentar la capacidad de afrontar los desafíos contemporáneos, fomentando así la competitividad internacional del sistema europeo de educación superior. Se enfatiza, de hecho, en la necesidad de que las universidades españolas mejoren su competitividad internacional, destacando la importancia de participar en *rankings* globales y colaboraciones internacionales para atraer talento y mejorar la posición de España en el ámbito global. Algunos puntos clave a este respecto son los siguientes:

   - El **desarrollo de un currículo** con programas de estudio conjunto que responda a los desafíos actuales de la comunidad europea.
   - El **fomento de la cooperación** entre universidades e instituciones de educación superior, con el objetivo de enriquecer la experiencia educativa y promover la innovación a través de dichos programas conjuntos, así como proyectos de investigación colaborativos.
   - La **integración efectiva de la docencia y la investigación en la educación superior**, incentivando una cultura de innovación y aprendizaje continuo.
   - La **transferencia de conocimientos** desde las universidades hacia la industria y la sociedad, facilitando el desarrollo económico y social

7. **Asegurar el reconocimiento mutuo de títulos y periodos de estudio**

   El reconocimiento de los títulos y periodos de estudio obtenidos en el extranjero sigue siendo un principio clave para garantizar la movilidad y la integración de España en el EEES. Cita del Real Decreto 822/2021,

> "*Artículo 10. Los procedimientos de reconocimiento y de transferencia de créditos académicos en los títulos universitarios oficiales tienen por objeto facilitar la movilidad del estudiantado entre títulos universitarios oficiales españoles, así como entre estos y los títulos universitarios extranjeros. Las universidades aprobarán normativas específicas para regular estos procedimientos conforme a lo dispuesto en el presente real decreto por la normativa nacional e internacional.*"

1.4. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

La creación de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) data de 1972, con el Decreto 2310/1972, y nace como parte de un proyecto con una decidida ambición innovadora y con la voluntad de contribuir a la reforma de la universidad española de la Ley General de Educación de 1970, que especificaba, en el artículo 47.1, lo siguiente:

> *"A fin de ofrecer oportunidades de proseguir estudios a quienes no puedan asistir regularmente a los centros ordinarios o seguir los calendarios y horarios regulares, el Ministerio de Educación y Ciencia, oídos los organismos competentes, reglamentará las modalidades de enseñanza por correspondencia, radio y televisión..."*

Con esto, la enseñanza a distancia adquirió, por derecho propio, una posición en el sistema general de educación que ya había tenido una gran acogida en su experiencia previa del bachillerato radiofónico para estudiantes españoles residentes en el extranjero.

La UNED fue inicialmente concebida con el nombre de *Universidad Libre a Distancia* (UNILAD), y pretendía estar orientada al antiguo estudiante "*libre*", i.e., aquel que no seguía la enseñanza presencial ordinaria ni asistía regularmente a clases, sino que preparaba las asignaturas de forma autónoma y se presentaba directamente a los exámenes. Teniendo en cuenta que la palabra "*libertad*" despertaba entonces grandes recelos, se evitó nombrarla, y la primera propuesta de UNILAD se transformó entonces en la actual UNED. Aprobada la Ley General de Educación en agosto de 1970, el ministro Villar Palasí encargó el proyecto de universidad a Manuel García Garrido. El ministro Villar Palasí nombra así una comisión y, un tiempo después, el 18 de agosto de 1972, se aprueba el mencionado decreto que origina la UNED.

El primer rector de esta universidad fue D. Manuel García Garrido, anunciado el 18 de octubre de 1972 en el "BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO. GACETA DE

MADRID", número 224, para ponerla en funcionamiento el 1 de enero de 1973. Es destacable el hecho de que, previamente, D. Manuel García Garrido *visitó la Open University como modelo de universidad a distancia*. Así, el modelo de universidad con el que empezó la UNED tiene necesariamente cierta inspiración en la Open University.

A principios de 1972, en la *Serie de Cuadernos de Información del Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia*, se puede encontrar un folleto titulado *Universidad Nacional a Distancia. Nuevos horizontes de la Universidad* [9], en los que se leen los **objetivos y finalidades iniciales de esta universidad**; metas que, aun hoy, parecen seguir vigentes. A saber:

1) Efectividad de la **igualdad de oportunidades** en la Enseñanza Superior.

2) Tratamiento educativo adecuado a la **problemática que plantea la Enseñanza Libre** para convertirla en una enseñanza debidamente tutorizada y, en definitiva, social y hasta económicamente rentable.

3) **Descongestión universitaria**.

4) **Renovación metodológica**, ya que supone una experiencia educativa de vanguardia.

5) Reforzamiento del sistema educativo tradicional, especialmente para **evitar abandonos** y recuperar a los que dejaron truncados sus estudios universitarios.

6) Proporcionar el **instrumento adecuado para el perfeccionamiento y la educación permanente** y, en definitiva, servir de vehículo para la culturización general del país.

7) **Superar** la limitación que para muchos estudiantes puede representar la **imposibilidad de asistencia diaria** a las clases, por diferentes circunstancias: trabajo, enfermedad, viajes, etcétera.

8) Aprovechar al máximo las **posibilidades que ofrecen las nuevas técnicas audiovisuales** para una enseñanza informativa más completa, más actual.

9) Facilitar la **continuidad del proceso educativo a lo largo de la vida** del hombre mediante la conexión e interrelaciones de los distintos ciclos y modalidades.

10) Ofrecer **oportunidades para la reincorporación** de quienes abandonaron sus estudios.

11) Que cada alumno **desarrolle al máximo sus facultades**, sin necesidad de supeditarse a la marcha general de la enseñanza.

A lo largo del proyecto docente se retomarán de manera recurrente estos *objetivos fundacionales de la UNED*, dado que toman una relevancia

especial en la configuración metodológica de la asignatura. De este modo, la UNED se convierte, desde su nacimiento, en una universidad singular que, por medio de una enseñanza no presencial, pretende cumplir un *propósito social* de igualdad de oportunidades y culturización general del país. Desde entonces, la UNED ha crecido considerablemente, tanto en número de carreras como en estudiantes matriculados. En 1973, se matricularon un total de 12.452 de alumnos/as entre el grado de Derecho, el grado de Filosofía y Letras y el Curso de acceso. No obstante, el año siguiente la matrícula aumentó a 21.360, y se aumentó la oferta en 9 grados, apareciendo, por fin, las *matemáticas*. Con este inicio, la UNED siguió creciendo hasta superar los 260.000 alumnos/as en 2012. La UNED ha contado en el curso 2025/2026 con unos 157.627 estudiantes matriculados en estudios oficiales: 90.229 (57,2 %) mujeres y 67.398 (42,8 %) hombres, cifra similar a la del curso 2023/2024 con 150.478 estudiantes matriculados en estudios oficiales, 84.801 (56,4 %) mujeres y 65.677 (43,6 %) hombres (datos obtenidos del Portal Estadístico de la UNED). Estos números convierten a la UNED en la mayor universidad de España en número de estudiantes.

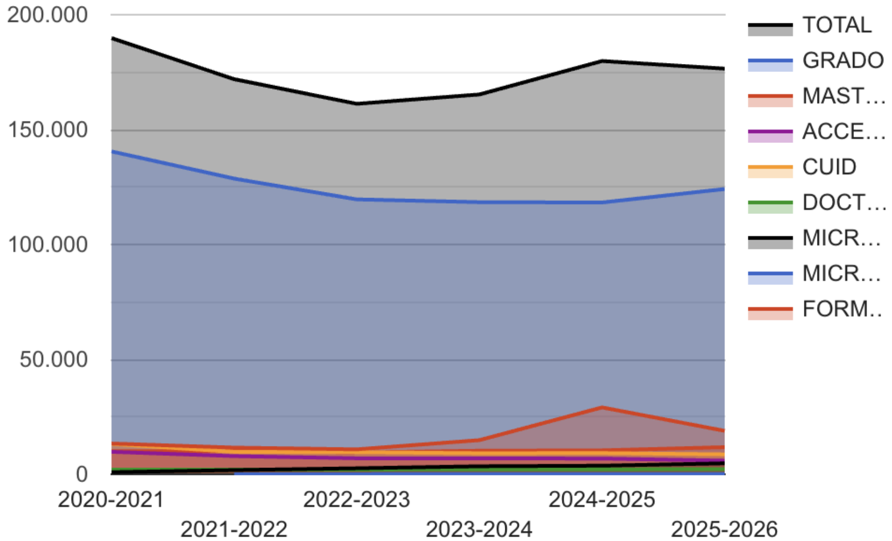
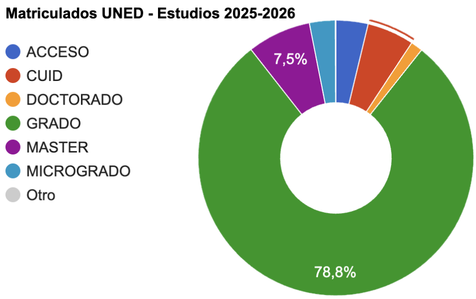
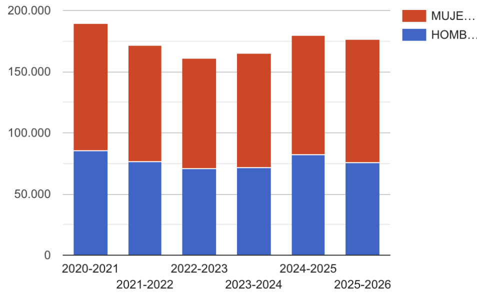


Figura 1.1: Evolución del número de estudiantes matriculados por estudios.

Con esto, la UNED ha ido creciendo mientras hacía un esfuerzo constante por actualizarse en su metodología, adaptándose en cada etapa a sus tiempos, y por preservar intactos el resto de los objetivos presentados en su etapa inicial.



(a) Estudiantes matriculados por estudios en el curso 2025/2026.



(b) Evolución de estudiantes matriculados por sexo

Llegó así, en 2007, el documento *“La adaptación de la UNED al EEES”*, que presenta nuevas experiencias realizadas durante el proceso de renovación metodológica que se ha llevado a cabo para la implantación de la oferta académica en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). En el *“Plan Director 2010–2013”* , por fin se establecieron las principales líneas estratégicas de la UNED y se consolidó la implantación del Modelo EEES. En un documento más moderno, las *“Orientaciones estratégicas 2017-2021”*, se especifica que la misión de la UNED consiste en,

“*Desempeñar el servicio público de la educación superior mediante la docencia, el estudio, la investigación y la transferencia del conocimiento, asumiendo el compromiso de facilitar al máximo el acceso a la enseñanza universitaria, la continuidad de estudios y la formación a lo largo de la vida a todo tipo de personas. Todo ello mediante la aplicación de una metodología didáctica específica que combina las tecnologías más avanzadas con la tutorización personalizada presencial y digital.*”

En dicho informe, se hace además énfasis en los valores de la UNED:

“*Igualdad en el acceso a la educación superior, compromiso con la calidad docente y excelencia académica, su labor social y su contribución a la mejora de las condiciones de vida de la sociedad.* ”

De esta manera, los compromisos y objetivos de la UNED siguen alineados con los 11 objetivos descritos en el folleto “*Universidad Nacional a Distancia. Nuevos horizontes de la Universidad*”, con los que se fundó en 1972. En particular, la labor social que ha desempeñado la UNED desde su fundación ha forjado su identidad como una universidad de prestigio, accesible y comprometida con la sociedad, fundamentada en la excelencia académica, el rigor científico y la vocación de servicio público.

En materia de igualdad de género, es destacable el papel de la UNED promoviendo la incorporación de mujeres a la universidad y al mercado laboral (1.2b). De hecho, en 1982, Elisa Pérez Vera fue nombrada rectora de la UNED, y se convirtió en la primera mujer rectora en España. Además, cabe señalar su esfuerzo en ser una universidad inclusiva y accesible, con programas específicos para personas con discapacidad y otros colectivos desfavorecidos; entre los que podemos destacar al *(Centro de Atención a Universitarios con Discapacidad* (UNIDIS), cuyo objetivo principal es que los estudiantes con discapacidad que deseen cursar estudios en esta universidad puedan gozar de las mismas oportunidades que el resto de estudiantes de la UNED.

El reciente "*Plan Estratégico 2023-2026*" marca el inicio de una etapa de mejora para la universidad en el corto plazo, adaptándola al contexto y a las necesidades actuales. El análisis DAFO (Debilidades, Amenazas, Fortalezas y Oportunidades) incluido en dicho plan identifica los siguientes factores:

- **Debilidades**
  - **Financiación pública insuficiente:** La financiación pública que recibe del Estado no supera el 40 %, mientras que los fondos de las demás universidades públicas provienen en un 70 % de las respectivas administraciones autonómicas.
  - **Reconocimiento limitado de la marca UNED:** Fortalecer la marca UNED a nivel nacional e internacional, promoviendo su reputación como una institución educativa de excelencia y aumentando la visibilidad de los programas académicos que ofrece.
- **Amenazas**
  - **Disminución gradual en el uso y relevancia de los Centros Asociados de la UNED:** Es fundamental fomentar la participación y colaboración con los Centros Asociados para preservar su relevancia dentro del modelo híbrido de enseñanza de la UNED.
  - **Aumento de la competencia privada:** La UNED se enfrenta a un entorno cada vez más competitivo con instituciones privadas, lo que exige mejorar su propuesta de valor, reforzar su diferenciación y consolidarse como una opción educativa de alta calidad.
- **Fortalezas**
  - **Función social:** La UNED tiene una marcada finalidad social, democratizando la educación superior y ofreciendo oportunidades académicas a un público más amplio y diverso.
  - **Referente en recursos educativos digitales** y uso de plataformas de aprendizaje avanzadas.

- **Cobertura nacional e internacional:** La UNED cuenta con una amplia red de Centros Asociados en España y en el extranjero que le permite ofrecer educación superior a una diversa comunidad de estudiantes, sin importar su ubicación geográfica.

- **Oportunidades**
  - **Refuerzo de los estatutos** para adaptarse a la Ley Orgánica del Sistema Universitario (LOSU) 2/2023 de 22 de marzo.
  - **Fondos Next Generation EU y Transformación digital:** Estos fondos son una iniciativa de la UE dirigida a la recuperación económica tras la crisis provocada por el COVID-19, con el objetivo de promover la transformación digital, la sostenibilidad y la resiliencia en los Estados miembros.

El *"Plan estratégico 2023-2026"* conlleva asimismo la consecución de tres objetivos estratégicos que se caracterizan por su amplitud y transversalidad,

- **Una UNED *excelente***: Haciendo énfasis en la calidad docente, la investigación y el desarrollo de programas y servicios que respondan a las necesidades y expectativas de los estudiantes.

- **Una UNED *cercana e internacional***: Ofreciendo oportunidades de educación a personas a lo largo del mundo, así como cooperando con otras instituciones.

- **Una UNED *innovadora***: Incentivando el desarrollo tecnológico y renovándose cada día para ofrecer un mejor aprendizaje.

La oferta educativa actual de la UNED se compone de 30 títulos de grado, 79 másteres y 21 programas de doctorado, además de cursos de Acceso a la Universidad, cursos de idiomas, etc. Esta oferta educativa es llevada a cabo por unos 1.592 miembros del colectivo P.D.I. (786 mujeres y 806 hombres) y de 1.081 miembros del colectivo P.A.S. (330 hombres y 751 mujeres) destinados en la Sede Central[2], sin olvidar el trabajo que realizan los profesores tutores y el personal de los centros asociados. De las 30 titulaciones de grado, la Facultad de Ciencias se encarga de impartir 4: Grado en Ciencias Ambientales, Grado en Física, Grado en Matemáticas y Grado en Química.

En lo relativo al grado de máster, el Departamento de Matemáticas Fundamentales coordina un máster universitario titulado "*Matemáticas Avanzadas*", que está dirigido a estudiantes que desean ampliar sus conocimientos e iniciarse en la investigación. Este programa ofrece formación avanzada y especializada, preparando a los estudiantes para estudios de doctorado o proyectos de investigación innovadores. Este máster consta actualmente (Plan 2023) de tres especialidades:

[2]Datos a 12 de enero de 2026 en la página web de la UNED.

Análisis Matemático, Álgebra, Geometría y Topología, Matemática Aplicada.

Por último, existe un programa de doctorado en Ciencias (Cód. 9601), con diferentes líneas de investigación en ciencias y una, en particular, en *Matemáticas*. El Programa de Doctorado tiene como objetivo la formación avanzada del estudiante en técnicas de investigación científica, culminando en la elaboración de una tesis doctoral original sobre temas actuales de interés dentro de las líneas de investigación establecidas. Proporciona formación y metodología científica, profundizando en los conocimientos de la especialidad para formar científicos altamente cualificados, con proyección académica y profesional. Se rige por el Real Decreto 99/2011 y el Reglamento de estudios de doctorado de la UNED (BICI del 15 de julio de 2015).

Como se ha mencionado, aproximadamente unos 200.000 estudiantes cada año confían en la UNED. La cantidad de alumnos y alumnas que se matriculan en la UNED, y la modalidad que ofrece, dan pie a un alumnado con unas características singulares.

En lo relativo a la distribución en edades de los estudiantes, esta muestra[3] una mayoría de alumnos/as en edades superiores a los 30 años: mientras que en las universidades presenciales solo un 9 % de sus egresados de grado tienen más de 30 años, en la UNED este colectivo supone el 72 %, donde aproximadamente el 66,5 % de las personas matriculadas tiene un empleo en el momento de realizar la matrícula y con una mayoría de mujeres (56,3 %). La situación más común es la de "*empleado por cuenta ajena*", en la que se sitúa el 59 % de quienes tienen empleo. El 64 % de las personas matriculadas y con empleo ha trabajado más de 10 años a lo largo de su vida. Un 60 % del total tiene alguna motivación laboral y principalmente creen que sus estudios tendrán efecto en la mejora de sus competencias profesionales, por encima de una mejora en su situación laboral o de su salario. En general, la educación a distancia les permite acceder a una formación compatible con su vida laboral, personal o con su lugar de residencia. Es importante entender que conocer la realidad del conjunto de los estudiantes a los que un docente debe impartir clase es **fundamental** a la hora de diseñar la metodología docente a llevar a cabo. Esto se muestra, de manera explícita, en muchas teorías pedagógicas y, en especial, en la didáctica de las matemáticas (ver sección 2.7).

Se ha desarrollado un "*Plan de Acogida*" de la UNED para orientar a los nuevos alumnos durante el primer año en la universidad. El *Instituto Universitario de Educación a Distancia (IUED)* y el *Centro de Orientación de Información y Empleo (COIE)* participan en el diseño y desarrollo de dicho plan. El Vicerrectorado de Estudiantes y Emprendimiento coordina el acceso a la universidad, tanto para alumnos/as nacionales como internacionales. Este plan institucional de carácter integrador pretende que el estudiante nuevo logre:

- Alcanzar un buen desempeño con la metodología y los recursos de la UNED.

[3]Según el informe de Situación laboral y empleabilidad de la UNED.

- Entrenar estrategias de aprendizaje autónomo y autorregulado.
- Desarrollar, en general, las competencias genéricas necesarias para el estudio superior a distancia.
- Nivelar conocimientos previos, especialmente de materias básicas con mayor dificultad.
- Desarrollar competencias instrumentales en el uso de las TIC aplicadas al estudio en la UNED.

Entre las principales acciones de preparación y formación de los estudiantes destacan:

- Programas de nivelación de conocimientos previos o *"Cursos 0"* en línea, basados en el autoaprendizaje y centrados especialmente en los contenidos previos requeridos.
- Cursos en línea para el entrenamiento de las competencias para el aprendizaje autorregulado a distancia, con créditos de libre configuración, bajo la dirección del COIE y del IUED.

Entre las medidas destinadas al seguimiento de los estudiantes de primer año cabe destacar la Comunidad Virtual de Acogida, destinada a los estudiantes de nueva matrícula y Curso de Acceso. De manera análoga, estas comunidades tienen como objetivo orientar al estudiante durante el primer año en el conocimiento de la universidad, su metodología y recursos, así como en el desarrollo del aprendizaje autónomo. Asimismo, se pretende promover la identidad de grupo, disminuyendo el sentimiento de lejanía del estudiante a distancia, y alentar la formación de grupos de estudio en línea.

El alumno tiene derecho a participar en los órganos de gobierno, tanto de su Centro Asociado como en las elecciones de representación estudiantil en los órganos colegiados de la Universidad, incluido el Claustro. La UNED ofrece, además, un servicio de Orientación y Formación para el Empleo y Autoempleo para la empleabilidad. Resulta destacable el *Programa de creación de empresas del COIE de la UNED*, destinado a estudiantes y titulados UNED con ideas de emprendimiento, en el que se presentan proyectos innovadores, sostenibles y de impacto, los cuales serán acompañados en los primeros pasos para transformar sus iniciativas en empresas. Otras acciones destacables son las Jornadas de Empleabilidad en las que se imparten charlas destinadas a la mejor incursión de los estudiantes egresados por la UNED en el mercado laboral.

Con objeto de cumplir los objetivos de igualdad de oportunidades y servicio social que están planteados desde la fundación misma de la UNED (ver los 11 objetivos del folleto "*Universidad Nacional a Distancia. Nuevos horizontes de la Universidad*" expuestos más arriba), existe un centro especializado de atención a los estudiantes discapacitados de la UNED, "*UNIDIS*", que ofrece a los estudiantes discapacitados las mismas oportunidades que al resto de alumnos/as. Durante el curso 2020/2021, el número de estudiantes con discapacidad en la universidad española fue de 23.851, lo que representa aproximadamente el 1,5 % del total de los alumnos. Cifras similares se dieron durante el curso 2021/2022, siendo 22.156 estudiantes con discapacidad matriculados en alguna universidad española. De los 23.851 estudiantes correspondientes al curso 2020/2021, 8.342 lo hicieron en la UNED (el 34,9 %) según los datos que aparecen publicados[4] en la Guía de Atención a la Discapacidad de *Fundación Universia*. La labor desarrollada por UNIDIS fue reconocida con el Premio de la Fundación Alares 2016 en la categoría de "*Universidades, escuelas de negocio e instituciones educativas y de investigación*" por el proyecto "*Prácticas profesionales virtuales para estudiantes con discapacidad*".

Otra acción en esta dirección se muestra en que la UNED cuenta con un programa de estudios universitarios en Centros Penitenciarios, regulado por un convenio entre la universidad y el Ministerio de Ciencia e Innovación, la Secretaría General de Instituciones Penitenciarias y otros organismos públicos. La universidad pone a disposición de los alumnos/as de Centros Penitenciarios una serie de servicios como son tutorías semanales en los Centros Penitenciarios, apoyo en la utilización de la plataforma educativa, en los centros penitenciarios que la tengan instalada (para los estudios de Grado) o asistencia al Centro Asociado más próximo para los estudiantes en régimen abierto y libertad condicional. En el curso 2025/2026 se matricularon en los Centros Penitenciarios 1171 estudiantes.

En 2011 se firmó un convenio con el Ministerio de Defensa que permite al personal militar desplazado fuera del país, el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales. En el año 2022, se firma el convenio de impartición de títulos de Grado a personal de las Escalas de Suboficiales de las Fuerzas Armadas. El objetivo de este convenio es establecer un programa educativo específico dirigido a los suboficiales de las Fuerzas Armadas, que les permita obtener titulaciones universitarias de interés para las Fuerzas Armadas, facilitando así su promoción a las escalas de oficiales del Cuerpo General y de Infantería de Marina.

Es también destacable que la UNED ofrece un examen de acceso directo a mayores de 25/40 y 45 años, posibilitando la adquisición de estudios de Grado sin titulación previa. En el caso particular del acceso para mayores de 40 años se requiere que acrediten experiencia profesional relacionada con el grado que desean cursar. Además, la universidad dedica un curso completo a su formación (Curso +25, Curso +40 y Curso +45), con el apoyo del personal docente y los recursos de la universidad para la superación de la prueba de acceso.

Por último, se quisiera también destacar la labor de *UNEDassis*, que se

[4]V Estudio sobre el grado de inclusión del sistema universitario español respecto de la realidad de las personas con discapacidad. Al momento de redactar esta memoria, aún no se disponía de los datos correspondientes a cursos posteriores.

alinea como una herramienta eficaz para el cumplimiento de los citados objetivos de igualdad de oportunidades y labor social. Específicamente, UNEDassis es un servicio de la UNED creado para la gestión del acceso y de la admisión de estudiantes a las universidades españolas; está especialmente dirigido a los estudiantes internacionales. A través de UNEDassis los estudiantes internacionales pueden obtener una acreditación con la que *podrán solicitar admisión a estudios de grado en universidades españolas*. Así, este servicio cumple las funciones de facilitar el acceso a la universidad española a los estudiantes de sistemas educativos internacionales, facilitar la internacionalización de la universidad española y convertirse en un referente a nivel nacional e internacional en las actividades relacionadas con la acreditación de estudios preuniversitarios.

1.5. El alumnado de la UNED: características y necesidades

En el capítulo 1 se ha presentado el perfil medio del alumnado de la UNED. La enseñanza universitaria a distancia permite el acceso a estudios superiores a un número considerable de alumnas y alumnos que, por algún motivo, no pueden o no quieren acceder a la universidad a través de la enseñanza presencial. Los motivos por los cuales los estudiantes eligen la educación a distancia suelen ser muy diversos. Entre ellos podemos destacar los siguientes: *laborales*, *familiares*, *geográficos* o *económicos*. Todo ello configura un perfil de alumnado marcadamente heterogéneo en muchos sentidos: en edad, en conocimientos y en dedicación, siendo este último grupo estudiantes que trabajan o tienen responsabilidades familiares.

Los estudiantes acceden al grado tras superar la selectividad o las pruebas de acceso a mayores de 25/40 y 45 años. También pueden acceder a los estudios de grado alumnas/os que han cursado estudios de bachillerato en centros extranjeros y poseen el título de Bachillerato Europeo o de Bachillerato Internacional y han superado las pruebas de competencias específicas correspondientes.

En el curso 2025/2026 se matricularon aproximadamente 124.142 estudiantes en enseñanzas de grado, de los cuales 9.318 correspondieron a la Facultad de Ciencias. Esta facultad imparte cuatro títulos oficiales (Matemáticas, Física, Química y Ciencias Ambientales) y, dentro de ella, el Grado en Matemáticas concentra 2.968 estudiantes, siendo, con mucho, el de mayor matrícula. **La asignatura Campos y Formas, objeto del presente proyecto docente, cuenta en dicho curso con 151 estudiantes matriculados.**

Al contrario que la universidad presencial, en 2022 la UNED presentaba un 82,1 % de estudiantes de más de 26 años.

Por otro lado, en torno al **65 % del alumnado trabaja al mismo tiempo que estudia**. La distribución anterior muestra un perfil de alumnado muy heterogéneo, con una diferencia notable con respecto al alumnado presente en una universidad presencial, que suele entrar en la universidad justo después de realizar el bachillerato. Estos datos, y otros relativos al perfil de estudiantes, se pueden ver en la ponencia organizada por el IUED mostrada en el código QR.

1.6. Recursos docentes en la UNED

En 2008 se aprobaron una serie de recomendaciones sobre el material didáctico de carácter obligatorio en los Grados. Según se estableció en el Consejo de Gobierno del 17/11/2008, el alumno dispondrá de:

- **Guía de estudio en formato electrónico:** Cada asignatura ofrece una guía con las orientaciones necesarias para su desarrollo. Consta de dos partes: la información básica que el alumno necesita conocer antes de matricularse y la información detallada de la asignatura. La primera puede encontrarse también en la guía de la titulación y en el portal web de la UNED. La información sobre la planificación está disponible en el curso virtual de la asignatura, y en ella se detalla la mejor manera de afrontar el estudio de la asignatura, tanto en reparto horario como en orden.

- **Unidades didácticas:** Las unidades didácticas, presentadas en forma de material impreso o electrónico, constituyen un *instrumento fundamental* en el estudio de los estudiantes de grado de la UNED. Dichas unidades pueden estar disponibles en el campus de la asignatura, o encontrarse en las librerías de la UNED mediante venta directa u en línea.

- **Actividades y pruebas de evaluación continua:** Estas pruebas están a disposición del alumno en el curso virtual, dentro de la plataforma Ágora. Las más conocidas entre estas pruebas son las coloquialmente denominadas como "*PEC*", que suelen tener un carácter opcional, y las fechas de realización más probables son entre finales de noviembre y mediados de diciembre del curso correspondiente.

Los materiales didácticos constituyen un componente fundamental de la metodología de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). En ellos concentraremos nuestros principales esfuerzos pedagógicos al presentar el proyecto docente de la asignatura (capítulo 2). La adaptación al EEES requiere que los materiales contribuyan a facilitar:

- El fomento del aprendizaje autónomo

- El aprendizaje orientado a la adquisición de competencias genéricas y específicas que implica no solo la adquisición de conocimientos, sino también el desarrollo de habilidades y destrezas

- La evaluación continua del aprendizaje
- El seguimiento y tutorización del proceso de aprendizaje

Más adelante especificaremos cómo el material propuesto para la asignatura de Campos y formas contribuye a cumplir estos objetivos. Por otro lado, para conseguir material impreso, el alumno tiene a su disposición las siguientes **bibliotecas** de la UNED:

- Biblioteca Central, situada en Paseo Senda del Rey 5 (Ciudad Universitaria-Madrid).
- Biblioteca Campus Norte, situada en C/ Juan del Rosal, 14 (Ciudad Universitaria-Madrid).
- Biblioteca de Humanidades, situada en C/ Argumosa, 1 (Madrid).
- Biblioteca del Instituto Universitario Gutiérrez Mellado, situada en C/ Princesa, 36 (Madrid).

Además, cada centro asociado tiene su propia biblioteca a la que puede acceder el estudiante matriculado en dicho centro (véase subsección 1.6.2 para más información sobre centros asociados). La UNED cuenta además con "*librosUNED*", una librería digital que permite la compra de libros en formato digital a precios reducidos, en la que se puede encontrar el material de la asignatura protagonista de este proyecto docente.

Podemos, además, destacar los **medios audiovisuales** en la UNED. En este sentido, la UNED dispone de "*UNED Media*", un centro propio de diseño y producción de medios audiovisuales, que ofrece una variada selección de soportes y formatos audiovisuales con el fin de apoyar las tareas docentes e investigadoras del profesorado y facilitar a los estudiantes el acceso a contenidos audiovisuales de carácter científico, tecnológico, cultural o institucional, que les puedan ser útiles en sus actividades académicas. *UNED Media* realiza contenidos audiovisuales para diversos canales de difusión:

- **Radio y Audio:** Los programas de radio de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) tienen un carácter divulgativo y están dirigidos a ampliar la formación en el ámbito de la educación permanente. La UNED difunde su producción a través de tres cadenas de Radio Nacional de España (RNE): Radio 3, Radio 5 y Radio Exterior de España. Radio 3 emite de viernes a domingo, de 5 a 6, el programa cultural y educativo titulado *Sin Distancias*, orientado a los estudios que se imparten en la universidad. Por su parte, Radio 5 presenta, entre otros, *Respuestas de la Ciencia*, un microespacio dedicado a la divulgación científica. Finalmente, Radio Exterior de España transmite *Heliotropo*, de carácter musical, y *Caminos de Ida y Vuelta*, que aborda temas relacionados con las migraciones y la ciudadanía en el exterior.

- **TV y Vídeo:** La Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) cuenta con un plató de grabación y control de realización, así como con cámaras, una sala de edición y un espacio para la postproducción. Con estos recursos, se llevan a cabo promociones, documentales monográficos, entrevistas y mesas redondas entre docentes y especialistas. La cadena La 2 de Televisión Española (TVE) emite el programa *UNED*, un espacio semanal de una hora de duración en el que varios reportajes abordan en profundidad la actualidad cultural y social, tanto a nivel nacional como internacional. Los programas emitidos están disponibles en RTVE Play.

Los contenidos generados a través de *UNED Media* también pueden encontrarse en "*Canal UNED*", el portal audiovisual donde la UNED aloja sus materiales divulgativos y de apoyo al estudiante. **Más adelante precisaremos cómo el material didáctico de la asignatura de Campos y Formas aprovecha este medio de difusión**.

En relación con los medios audiovisuales, *TeamsUNED* constituye un punto de encuentro para la comunidad universitaria de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) basado en la plataforma Microsoft Teams. Existe un TEAM para cada Escuela y Facultad, con canales específicos por carrera, uno por Centro Asociado y otro correspondiente al Consejo General de Estudiantes. Cualquier miembro de la comunidad puede crear nuevos canales, ya sean específicos o transversales, promoviendo el diálogo entre personas de distintas formaciones, estudios y roles dentro de la universidad. La plataforma Microsoft Teams permite llevar a cabo dos tipos de reuniones: las convencionales, por ejemplo, con los alumnos/as a los que se dirigen trabajos de fin de grado (TFG), trabajos de fin de máster (TFM) o tesis doctorales; y los eventos en directo, en los que los tutores realizan sesiones de tutoría.

Otra herramienta audiovisual, con una función similar a *TEAMS*, en la UNED es "*AVIP*". *AVIP* es una herramienta docente síncrona que permite dar soporte tecnológico a las tutorías y seminarios presenciales e interconectar Centros y Aulas para su funcionamiento en Red. Se trata de una plataforma tecnológica orientada a servicios audiovisuales que permite aprovechar el enorme potencial de la estructura multisede de la UNED.

AVIP proporciona la denominada "*presencialidad virtual*", que consiste en que desde cualquier Centro o Aula se puede acceder a las actividades presenciales de cualquier otro Centro o Aula como si estuviéramos allí. Esta plataforma permite crear lo que se denominan "*Aulas AVIP*", que, entre sus características, están dotadas de pizarras virtuales para su uso en la impartición de clases o tutorías.

1.6.1. Campus Virtual - Ágora

De entre los recursos digitales, el *Campus Virtual*, merece una atención especial. El Campus Virtual es un entorno web diseñado para crear una comunidad virtual, organizar servicios y desarrollar actividades académicas que atienden a las necesidades de la universidad, de manera similar a un campus universitario físico. Los usuarios de este espacio incluyen a todos los miembros de la comunidad universitaria: docentes, estudiantes y personal administrativo. A través del Campus Virtual de la UNED, los estudiantes pueden acceder a los cursos virtuales de las asignaturas que cursan, a la Biblioteca, al correo electrónico y a servicios administrativos, tales como la matrícula por Internet y la secretaría virtual, entre otros.

Ágora es la actual plataforma educativa de la UNED y representa la vía principal de comunicación con el estudiante. Esta plataforma de aprendizaje asíncrono o e-learning está basada en *OpenLMS*, y su principal objetivo es ofrecer a los estudiantes y docentes un espacio único donde se centralizan los recursos académicos y las herramientas necesarias para la enseñanza y el aprendizaje a distancia. La plataforma actúa como el corazón digital de las actividades docentes, organizando y gestionando los aspectos académicos de cada asignatura.

El entorno de Ágora ofrece un **entorno virtual personalizado:** cada asignatura dispone en Ágora de su propio "*curso virtual*", que actúa como el espacio principal de interacción entre profesores y estudiantes. Este curso virtual tiene las siguientes características principales:

- **Área personal:** En este espacio los docentes tenemos a nuestra disposición un *Calendario*, donde veremos e interactuaremos con los eventos que hayamos incluido personalmente, además de aquellos que se hayan ido creando en los cursos de los que formamos parte o incluso de todo el sitio, los *archivos privados*, aquellos documentos que queramos guardar en la plataforma, y desde donde podremos comprobar qué usuarios del curso están *en línea*.
- **Mis cursos:** Aquí encontraremos todos aquellos cursos en los que seamos docentes o alumnos/as.

Un curso generalmente se organiza de la siguiente manera:

- **Barra lateral izquierda:** En esta área veremos el índice del curso (actividades, recursos,...).
- **Barra lateral derecha:** En esta sección se incluyen los bloques del curso para facilitar el acceso a información importante como el Calendario o las Actividades del curso, entre otras posibilidades.
- **Cuerpo central:** En esta sección podremos acceder al menú del curso, así como a los contenidos del mismo. Es en esta parte donde se puede acceder a toda la información del curso. Esta información estará estructurada en *pestañas.* Aunque el equipo docente puede generar cuantas pestañas quiera, generalmente tenemos disponibles las siguientes:
    - *General:* Aquí encontraremos el *grosso* del contenido del curso.

- *Sección de Tutoría:* encontraremos los foros de acción tutorial, tanto con los estudiantes como de coordinación. Además del área de Material para los tutores.
- *Información académica:* Veremos el enlace a la guía académica de esta asignatura, así como el enlace a "*Akademos*".
- *Envío de calificaciones:* herramienta para asociar calificaciones de Ágora con subpruebas existentes en el *Sistema de Gestión de Calificaciones* (SGC).

Además, cada una de estas pestañas se puede subdividir, a su vez, en más pestañas que dan forma a la estructura del curso virtual (véase figura 1.3).

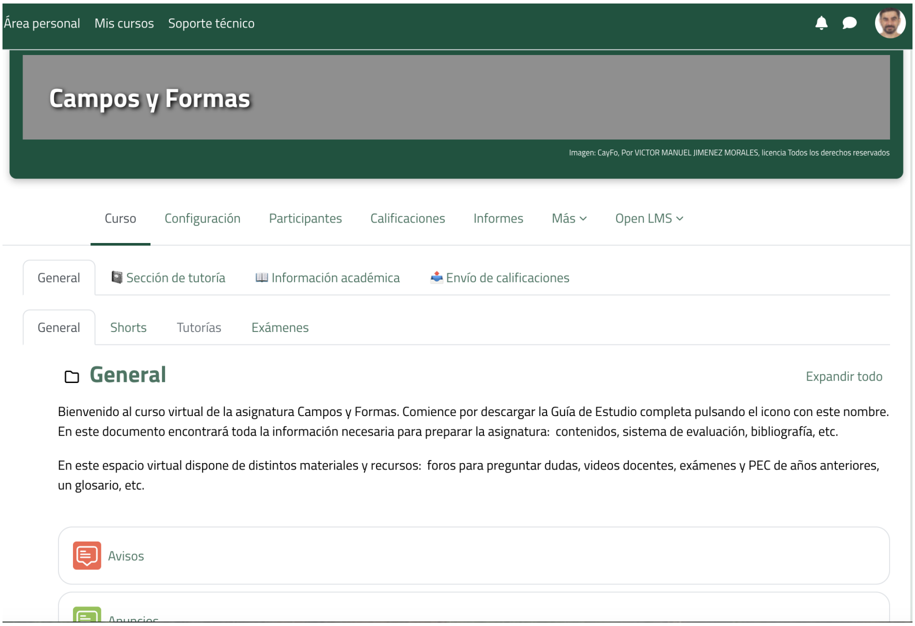


Figura 1.3: Entorno de curso virtual *Campos y formas 2025-2026*. Pestañas

Para terminar de dar forma al curso virtual, cada pestaña se subdivide en "*Temas*" y en cada tema añadiremos el contenido correspondiente (véase figura 1.4)

Dentro de estas aulas virtuales, los estudiantes pueden acceder a una amplia variedad de recursos, tales como:

- **Guías docentes**
- **Calendarios de actividades:** Con información sobre las fechas clave, plazos de entrega y eventos programados.

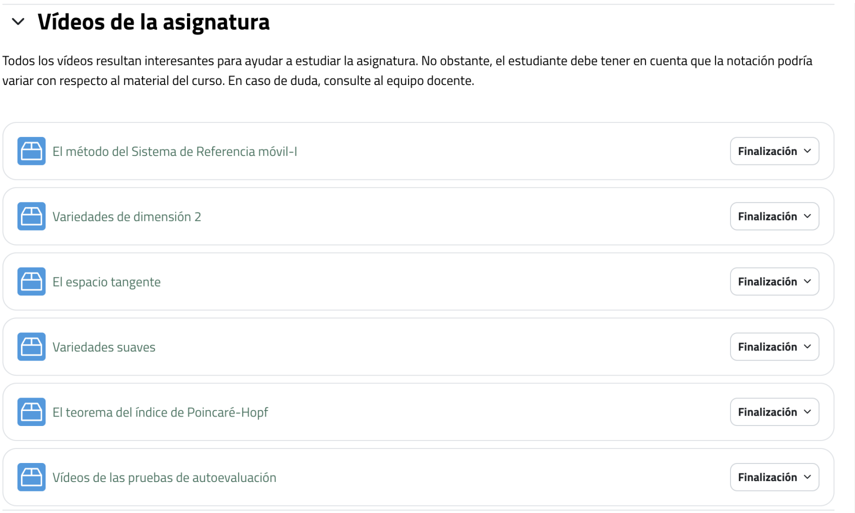


Figura 1.4: Tema "*Vídeos de la asignatura*" de Campos y formas

- **Materiales didácticos:** Lecturas, presentaciones, vídeos, simulaciones y otros recursos necesarios para el estudio de la asignatura.
- **Tareas y evaluaciones:** Módulos de entrega de trabajos, exámenes en línea y cuestionarios interactivos. Entre estos materiales, se debe destacar la "*PEC*", que generalmente está disponible en la pestaña correspondiente del curso virtual.
- **Foros de debate:** *De entre todos los recursos disponibles, este es, quizá, el más relevante*; gran parte de las interacciones entre el equipo docente y el alumnado se produce a través de estos foros. En estos espacios los estudiantes pueden discutir temas relacionados con el curso, plantear dudas y compartir opiniones con sus compañeros y profesores.
- **Mensajería interna:** Un sistema de correo dentro de la plataforma que permite la comunicación directa entre estudiantes y docentes.

Ágora no solo se limita al acceso a los contenidos de las asignaturas, sino que también ofrece acceso a una serie de servicios complementarios esenciales para los estudiantes de la UNED. Entre ellos, la *biblioteca de la UNED*, el *correo electrónico*, la *secretaría virtual*. Además, la plataforma Ágora también está diseñada para apoyar el seguimiento del progreso académico de los estudiantes.

Ágora ha sido diseñada para ser flexible y accesible desde cualquier lugar y en cualquier momento. Los estudiantes pueden acceder a la plataforma desde dispositivos móviles o desde su ordenador, lo que facilita la organización y el seguimiento de sus estudios, adaptándose a sus horarios y ritmos de trabajo. Además, al centralizar todas las herramientas necesarias para el aprendizaje en línea, Ágora promueve un entorno donde los estudiantes tienen un alto grado de autonomía para gestionar su propio aprendizaje, mientras que los profesores pueden guiar y supervisar su progreso de manera eficiente. Por todo ello, la plataforma Ágora puede considerarse el *principal recurso virtual de la UNED*, y su dominio resulta esencial para el ejercicio docente en esta universidad.

1.6.2. Centros Asociados

Otro recurso propio de UNED, y cuya importancia es necesario destacar, son los *Centros Asociados*. La UNED se fundó en un contexto de creciente demanda de educación superior en España en el que, sin embargo, muchas personas no podían desplazarse a las grandes ciudades, donde se concentraban la mayoría de las universidades. Por otro lado, el país experimentaba una alta tasa de abandono escolar a nivel universitario y una demanda insatisfecha de formación continua para adultos. Así, como se comentó en capítulo 1, la UNED surgió como una solución innovadora, inspirada en modelos internacionales como el de la Open University en el Reino Unido.

Desde sus inicios, la UNED adoptó la educación a distancia como su principal modalidad, utilizando material impreso, radio, televisión y correo postal para hacer llegar los contenidos a los estudiantes. Sin embargo, se reconoció desde temprano que, a pesar de la naturaleza a distancia de la institución, era fundamental contar con centros físicos donde los estudiantes pudieran recibir apoyo adicional. De hecho, la creación y regulación de los Centros Asociados de la UNED se basó en una serie de disposiciones legales que surgieron con la fundación de la universidad en 1972. El *Decreto 2310/1972*, por el cual se creó la UNED, estableció las bases para el funcionamiento de la universidad y la necesidad de contar con "*centros regionales*":

" *Artículo segundo.- Uno, La Universidad Nacional de Educación a Distancia tendrá como circunscripción todo el territorio nacional, su sede será Madrid y dispondrá, como dependencias propias, de los Centros regionales necesarios para el cumplimiento de sus funciones, ...*"

De igual manera, en el decreto fundacional de la UNED se detalla la estructura que deben adoptar los mencionados *centros regionales*, estableciéndose las figuras del *profesor-tutor* y del *director de centro*, las cuales resultan esenciales para su funcionamiento y para la esencia misma de estos centros.

"*Artículo octavo. Dos. Para el mejor desarrollo de sus funciones, la Universidad Nacional de Educación a Distancia contará igualmente con Directores de Centros regionales y profesores tutores, vinculados con la Universidad mediante contrato y reclutados entre quienes posean el título de Doctor...*"

"*Artículo octavo. Tres. La labor de los Profesores-tutores se realizará en contacto estrecho con el respectivo Departamento de la Universidad Nacional de Educación a Distancia.*"

Esto llevó a la creación de lo que hoy conocemos como *Centro Asociado*, con el fin de garantizar la interacción humana necesaria para completar la experiencia de aprendizaje. Muchos de los centros asociados se crearon poco tiempo después del mencionado decreto de fundación de la UNED. El primer centro asociado en fundarse fue el de Gran Canaria, que se crea por Orden Ministerial del 12 de enero de 1973, con ámbito regional Canarias y provincia del Sahara.

Como se comentó, los Centros Asociados se crearon originariamente como herramienta para lograr los 11 objetivos citados en el folleto titulado *Universidad Nacional a Distancia. Nuevos horizontes de la Universidad*, que hemos mencionado en capítulo 1. Más específicamente, los Centros asociados nacieron con los siguientes objetivos en mente:

1. **Descentralización y Proximidad al Estudiante:** España es un país con una geografía diversa y dispersa, donde muchas zonas rurales y pequeñas ciudades están alejadas de los grandes centros universitarios. La UNED, consciente de la barrera geográfica, diseñó una red de Centros Asociados como una herramienta para acercar la universidad al estudiante. Esto permitió que los estudiantes, independientemente de su lugar de residencia, tuvieran acceso a tutorías, recursos académicos y exámenes sin la necesidad de trasladarse a Madrid u otras grandes ciudades.

2. **Apoyo Académico y Personalizado:** Aunque la UNED promovía un modelo de educación a distancia, reconoció la importancia de mantener el contacto personal con los estudiantes. Los Centros Asociados se convirtieron en un espacio donde los estudiantes podían interactuar con tutores de manera presencial o semipresencial, favoreciendo el aprendizaje personalizado. Esta estructura ayudó a que los estudiantes no se sintieran aislados y pudieran resolver dudas y recibir orientación académica.

3. **Adaptación a un Público Heterogéneo:** Como se ha mencionado, el modelo de la UNED siempre ha atraído a un público muy diverso, compuesto por estudiantes trabajadores, adultos con responsabilidades familiares, personas con discapacidad o estudiantes en el extranjero. Los Centros Asociados permitían flexibilizar aún más el acceso a la universidad, proporcionando infraestructura local que apoyara a estudiantes con diferentes necesidades.

4. **Facilitar el Proceso de Evaluación y Exámenes:** Un aspecto crucial del sistema educativo de la UNED es la evaluación, que, en muchos casos, implica exámenes presenciales. Los Centros Asociados permitieron establecer una red de sedes descentralizadas donde los estudiantes podían realizar sus exámenes

sin tener que desplazarse largas distancias. Este aspecto logístico fue clave para el éxito del modelo a distancia.

Resulta también notable que los Centros Asociados terminaron no solo cumpliendo los objetivos iniciales, sino también funcionando como lugares de encuentro entre estudiantes, tutores y la comunidad académica local. En muchas zonas, los Centros Asociados se convirtieron en centros culturales y educativos, ofreciendo actividades formativas adicionales, como seminarios, talleres y conferencias.

Esta creación de comunidades de aprendizaje fue especialmente relevante en áreas rurales o zonas donde no existían otras instituciones de educación superior. En muchos casos, los Centros Asociados se convirtieron en puntos de referencia para la educación, no solo universitaria, sino también para la formación continua y el aprendizaje a lo largo de la vida. De esta manera, *los Centros Asociados se convierten en uno de los principales puntos fuertes de esta universidad con respecto a cualquier otra universidad no presencial.*

A partir del decreto de su creación, la normativa relativa a los centros asociados ha experimentado algunos cambios. La Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria (LRU) fue un hito importante en la historia de las universidades españolas, pues introdujo cambios estructurales importantes en el sistema universitario, otorgando mayor autonomía a las universidades públicas. En el caso de los Centros Asociados, la *LRU* les proporcionó un marco legal más formal, permitiendo a la UNED definir de manera más clara su papel en la estructura general de la universidad.

Los Estatutos de la UNED han sido actualizados varias veces para adaptarse a los cambios en el marco normativo y las necesidades de la universidad. A lo largo de estas actualizaciones, se ha regulado de manera más detallada la estructura y funcionamiento de los Centros Asociados:

i) **Estatutos de 1985:** La primera versión de los Estatutos de la UNED, aprobada en 1985, consolidó la importancia de los Centros Asociados como elementos esenciales en la estructura de la universidad. Estos estatutos definieron más claramente las responsabilidades del director del centro y del profesor-tutor, así como la relación de los centros con la sede central de la UNED en Madrid. Además, establecieron la obligatoriedad de firmar convenios de colaboración con las administraciones locales para garantizar la sostenibilidad de los centros.

ii) **Estatutos de 2005:** Los Estatutos de 2005 introdujeron modificaciones importantes en la gestión de los Centros Asociados. Un aspecto clave de estos estatutos fue la formalización de los profesores-tutores como figuras clave en el apoyo académico a los estudiantes, con responsabilidades definidas no solo en la orientación académica, sino también de seguimiento de los estudiantes.

III) **Estatutos de 2011:** La versión de los Estatutos de la UNED aprobada en 2011 se adaptó a las nuevas realidades educativas, incluyendo el avance de la tutorización en línea y el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza a distancia. Además, se consolidaron los convenios de colaboración como herramienta principal para la creación de nuevos centros, tanto en España como en el extranjero, adaptándose a las necesidades locales de cada región o país.

IV) **Modificación de los Estatutos de 2021:** Introdujo modificaciones que afectan tanto a la organización interna de la universidad como a la estructura y funcionamiento de los Centros Asociados. En lo relativo al profesorado tutor, aunque no se modifica directamente su régimen jurídico sustantivo, sí se refuerza su presencia institucional al mantenerse su representación en el Consejo Social —junto con profesor, estudiante y PAS— elegida por el Consejo de Gobierno, lo que consolida su papel dentro de la gobernanza universitaria y reconoce su función estructural en el modelo docente de la UNED.

La UNED cuenta con una extensa red de centros asociados con presencia en 19 países y ubicados en más de 75 ciudades diferentes en varios continentes.

1.7. Recursos humanos

La UNED, como institución de educación superior a distancia, se enfrenta a un desafío único en cuanto a la interacción entre el profesorado y los estudiantes. Debido a su naturaleza, la UNED no tiene sus fundamentos en la enseñanza presencial, lo que transforma el papel de los recursos humanos (*equipo docente, profesores-tutores,* *personal administrativo* y de *apoyo*) en actores fundamentales para garantizar el éxito académico de los estudiantes.

1.7.1. Equipo Docente

De acuerdo con la ANECA[5], *"la actividad docente cabe definirse como el conjunto de actuaciones, que se realizan dentro y fuera del aula, destinadas a favorecer el aprendizaje de los estudiantes con relación a los objetivos y competencias definidas en un plan de estudios y en un contexto institucional determinado".*

En la UNED este conjunto de actuaciones puede organizarse en cuatro grandes grupos de tareas que son desarrolladas por equipos docentes formados por profesores de la Sede Central de Madrid con el apoyo de profesores tutores de los Centros Asociados:

- Planificación de la docencia.
- Desarrollo de la actividad docente.
- Evaluación del aprendizaje de los estudiantes.
- Evaluación de la propia actividad docente y elaboración de eventuales propuestas de mejora.

Las funciones y obligaciones del equipo docente se regulan en el Capítulo II, Título VI, de los Estatutos de la UNED. Entre ellas, se encuentran

- Desempeñar adecuadamente las **tareas docentes e investigadoras** propias de su puesto de trabajo y régimen de dedicación, así como prestar la debida atención a sus alumnas/os, en especial dentro del horario establecido para ello.
- **Elaborar los materiales didácticos** de las asignaturas dentro de los plazos establecidos en cada caso para garantizar el correcto funcionamiento de la docencia.
- **Actualizar su formación** para perfeccionar su actividad docente e investigadora.
- Aceptar los **desplazamientos** que les sean requeridos para atender las *Pruebas Presenciales* y las conferencias y encuentros con los estudiantes en los centros, a instancias de estos y de los profesores tutores. En el caso de ausencia por conferencias o encuentros, se garantizará siempre la debida atención al resto del alumnado.

[5] ANECA. Programa de apoyo a la evaluación de la actividad docente del profesorado universitario. Modelo de evaluación. Versión 2-2006, 14 noviembre, p.10.

Además de lo previsto en los Estatutos de la Universidad, existen dos acuerdos del Consejo de Gobierno que regulan las obligaciones docentes del profesorado de la UNED:

1. El primero de ellos fue adoptado en marzo de 1991 por la Junta de Gobierno de la Universidad sobre las *"Obligaciones del personal docente de la UNED"*, documento elaborado según el Real Decreto 898/1985 de 23 abril por el que se regulaba la dedicación del profesorado universitario,

   "*los profesores con régimen de dedicación a tiempo completo habrán de cumplir el mismo horario de trabajo que los restantes funcionarios de la Administración pública del Estado… En todo caso, deberán cubrir, como mínimo, 12 horas semanales de trabajos en tareas docentes y asistencia a los estudiantes y profesores tutores. De estas 12 horas, 4 deberán ser cubiertas necesariamente en horario de tarde, entre las 16 y las 20 horas, con objeto de atender las llamadas telefónicas y las visitas de alumnos y profesores tutores*".

   Se incluye también la obligación de "*formar parte de los tribunales de Pruebas Presenciales, al menos dos semanas a lo largo del curso*", y también la de participar en la preparación y puesta al día de materiales didácticos,

   "Todos los profesores de la Universidad estarán obligados a colaborar en la preparación inicial y puesta al día del material didáctico impreso, audiovisual e informático necesario para la asignatura que les haya sido encomendada, así como a entregarlo para su edición dentro de los plazos aprobados anualmente por la Junta de Gobierno, siguiendo para ello las pautas aprobadas en cada caso por el Consejo de Departamento. En el supuesto de que el material impreso no haya sido específicamente redactado para la enseñanza a distancia, deberá ir necesariamente acompañado de una guía didáctica, y/o de los materiales audiovisuales e informáticos correspondientes. Esta obligación se extiende a la preparación de las Pruebas de Evaluación a Distancia, en su caso, y de las Pruebas Presenciales".

2. En el segundo acuerdo, tomado en el Consejo de Gobierno de 28 de junio de 2006 (Anexo XXXIII), se regulan las obligaciones de los equipos docentes con la atención de los estudiantes a través de los Cursos Virtuales, estableciendo como funciones de los equipos docentes las siguientes:

   a) Diseño general del curso virtual y sus contenidos complementarios
   b) Diseño de los espacios de comunicación
   c) Ordenación de las comunicaciones
   d) Atención a las dudas de contenidos a través del foro de Equipo Docente
   e) Diseño de actividades de aprendizaje propias del curso virtual

f) Organizar la coordinación de los profesores tutores a los que facilitarán orientaciones para el desarrollo de la tutoría presencial

El profesor tiene el derecho a la participación, directa o indirecta, en los organismos correspondientes del sistema educativo, como comisiones, consejos de departamento o votaciones.

En conclusión, en la UNED, el equipo docente asume un *rol significativamente distinto al que se observa en una universidad presencial tradicional.* Si bien en ambas instituciones los docentes son responsables de desarrollar los contenidos académicos y diseñar la evaluación, en la UNED se enfrentan al desafío adicional de garantizar que el material didáctico sea completamente autoinstructivo y accesible para estudiantes que, en su mayoría, no tienen interacciones directas y continuas con los profesores. El equipo docente en la UNED debe anticipar las posibles dificultades de los estudiantes en un entorno de autoaprendizaje, elaborando materiales que no solo presenten la información de forma clara, sino que guíen al estudiante en su proceso de aprendizaje de manera estructurada y progresiva.

A diferencia de una universidad presencial, donde la interacción cara a cara permite ajustes inmediatos en la metodología de enseñanza, el equipo docente de la UNED debe prever múltiples vías de comunicación (foros, tutorías en línea o guías detalladas, p. ej.) para suplir esta falta de contacto directo. Esto implica una mayor planificación y estructura en la creación de recursos didácticos y estrategias de enseñanza. Por lo tanto, la labor del equipo docente en la UNED no se limita a la transmisión del conocimiento, sino que también incluye la creación de un entorno de aprendizaje autónomo y sostenible, esencial para el éxito del modelo educativo a distancia.

Esta singularidad presente en la UNED se tendrá en cuenta en el diseño del contenido y metodología de la asignatura presentada de "*Campos y formas*", presentada en este proyecto.

1.7.2. Profesor Tutor

En el subsección 1.6.2, se ha abordado el tema de los *Centros Asociados*. Pues bien, el elemento central que da vida a los Centros Asociados son los *profesores tutores*, quienes desempeñan un papel fundamental en su funcionamiento y en el apoyo a los estudiantes.

En la UNED, el profesorado tutor desempeña un rol estructural en el proceso educativo, actuando como puente entre el equipo docente y el estudiantado, y proporcionando una atención tutorial de carácter presencial–en línea que contribuye a humanizar y sostener el aprendizaje autónomo propio de la enseñanza a distancia.[6]

[6] Reglamento de organización y funcionamiento de las tutorías en la UNED (aprobado por Consejo de Gobierno de 27/06/2025).

A diferencia de otros modelos no presenciales en los que el acompañamiento puede descansar casi exclusivamente sobre materiales y plataformas, la UNED consolida un modelo tutorial que combina la atención directa al alumnado mediante tutorías impartidas desde Centros Asociados, con el seguimiento y la evaluación continua a través del curso virtual.

Fuentes reguladoras y marco vigente. Las fuentes que inciden en el régimen del profesorado tutor son diversas (Estatutos de la UNED, Estatuto del Profesor Tutor, normativa institucional aplicable, etc.). No obstante, en lo relativo a la organización y funcionamiento de la tutoría (formas de agrupación, planificación de sesiones, desarrollo de la actividad tutorial y coordinación con el equipo docente), el marco normativo actualmente vigente queda sistematizado en el Reglamento de organización y funcionamiento de las tutorías en la UNED, aprobado en 2025.

Asignación del estudiantado y organización de los grupos de tutoría. Teniendo en cuenta la estructura territorial de la UNED, la universidad organiza sus recursos con el fin de velar porque cada estudiante matriculado en titulaciones de Grado y en Másteres universitarios oficiales habilitantes sea asignado a un profesor o profesora tutor/a de su Centro Asociado de referencia o, en su defecto, de otro Centro Asociado.

1. **Grupo de tutoría de centro**: Conformado por estudiantado y profesorado tutor del mismo Centro Asociado; las sesiones se imparten tanto de manera presencial como en línea, ofreciendo al alumnado matriculado en dicho centro la posibilidad de participar en cualquiera de estas modalidades. La gestión corresponde al Centro Asociado.

2. **Grupo de tutoría intercentros**: Integrado por estudiantado de diferentes Centros Asociados, tutorizado por un profesor o profesora tutor/a vinculado/a a un Centro Asociado concreto, desde el que se imparten las sesiones presenciales y en línea. La organización de estos grupos corresponde a la coordinación académica de Campus, que realiza la asignación cuando un Centro Asociado no puede organizar un grupo propio.

En cuanto al tamaño de los grupos, no se establece un límite mínimo ni máximo en los grupos de tutoría de centro (si bien no pueden mantenerse grupos sin estudiantes matriculados). Para los grupos intercentros se toma como referencia orientativa un máximo de 60 estudiantes por tutor/a. Para TFG y TFM se fijan límites orientativos de 15 y 10 estudiantes por tutor/a, respectivamente, y para prácticas externas curriculares un máximo aproximado de 20.

Funciones del profesorado tutor. El profesorado tutor colabora en el desarrollo de funciones docentes en las materias que le sean asignadas, de acuerdo con las directrices académicas establecidas por el departamento y el equipo docente responsable. En particular, y sin perjuicio de otras funciones previstas en la normativa vigente, el Reglamento recoge como funciones del profesorado tutor:

1. Orientar al estudiantado en la preparación de la asignatura, siguiendo las directrices del equipo docente.

2. Aclarar y explicar cuestiones relativas al contenido de las materias cuya tutoría desempeña, siguiendo dichas directrices.

3. Informar al equipo docente del nivel de preparación del alumnado de la asignatura.

4. Evaluar, en su caso, las pruebas de evaluación continua que determine el equipo docente y de acuerdo con su régimen de vinculación.

Estas funciones se concretan en tareas específicas (orientación de estudio, resolución de dudas, identificación de errores frecuentes, promoción de la participación, seguimiento proactivo, retroalimentación, elaboración de informe tutorial y comunicación de incidencias, etc.), desarrollables tanto en las sesiones de tutoría como en los espacios de tutorización del curso virtual.

Planificación, modalidad y desarrollo de las tutorías. Las asignaturas semestrales contarán con un total de 12 sesiones de tutoría, mientras que las anuales dispondrán de 24, con una duración mínima de 60 minutos por sesión. En TFG y TFM, el total de sesiones puede distribuirse entre sesiones grupales y seguimiento individual, llevándose a cabo desde el Centro Asociado con el que el profesorado tutor esté vinculado. Los Centros Asociados, en coordinación con la coordinación académica de Campus, elaboran el calendario de tutorías procurando evitar solapamientos entre asignaturas obligatorias y de formación básica de un mismo curso, facilitando la asistencia del alumnado.

Con carácter general, las tutorías se impartirán de forma presencial y en línea desde el Centro Asociado del profesorado tutor, extendiéndose mediante los medios técnicos institucionales a estudiantes del propio centro y de otros Centros Asociados. Cuando la naturaleza de las actividades lo aconseje, el equipo docente podrá proponer que algunas sesiones se impartan exclusivamente de manera presencial o en línea, coordinándose con los Centros Asociados. Asimismo, y con fines de accesibilidad, siempre que resulte posible se incorporará subtitulado durante la emisión en línea.

Las sesiones podrán orientarse a proporcionar orientaciones de estudio, trabajar activamente contenidos teóricos, guiar la realización de actividades y pruebas de evaluación, o realizar actividades prácticas y/o calificables integradas en el marco de la evaluación continua planificada por el equipo docente.

El profesorado tutor llevará a cabo el seguimiento del estudiantado y, en su caso, la evaluación continua conforme a las directrices del equipo docente, tanto en las tutorías presenciales/en línea como en los espacios habilitados en el curso virtual. Asimismo, **atenderá el foro o los foros asignados** a su grupo de tutoría, resolviendo consultas relativas a los temas tratados en las sesiones o al desarrollo de las pruebas de evaluación continua.

Coordinación con el equipo docente. Antes del inicio de la asignatura, el equipo docente pondrá a disposición del profesorado tutor, a través del curso virtual, las Orientaciones para el profesorado tutor, especificando tareas, criterios y elementos necesarios para homogeneizar la actividad tutorial, el seguimiento del alumnado y la aplicación de criterios de evaluación.

Finalmente, conviene señalar que, en determinadas asignaturas y bajo condiciones normativamente previstas, el equipo docente puede asumir directamente la orientación, el seguimiento y la evaluación continua sin apoyo tutorial; en tal caso, dicha decisión no debe suponer una merma de los servicios que el estudiantado debe recibir a través de la tutoría.

Actividad docente en la UNED: Distribución		
	Equipo Docente	Profesor Tutor
1. Planificación docente		
1.1. Elaboración de una guía docente	✓	
1.2. Preparación de materiales didácticos	✓	
1.3. Diseño de actividades de aprendizaje	✓	
1.4. Diseño de material de prácticas de laboratorio	✓	
1.5. Elaboración de una guía del tutor	✓	
1.6. Planificación de la tutoría		✓
2. Desarrollo de la docencia		
2.1. Atención a los estudiantes	✓	
2.2. Atención a Foros de dudas	✓	
2.3. Coordinación de la acción tutorial	✓	
2.4. Elaboración de recursos multimedia	✓	
2.5. Diseño y renovación de pruebas y actividades de evaluación continua	✓	
2.6. Actualización de guía didáctica	✓	
2.7. Reemplazo periódico de contenidos	✓	
2.8. Atención a tutores en actividades de evaluación continua	✓	
2.9. Desempeño de tutoría presencial		✓
2.10. Atención a curso virtual	✓	✓
2.11. Corrección de actividades de evaluación continua	✓	✓
2.12. Diseño de prácticas y prácticas de laboratorio	✓	
2.13. Realización de prácticas y prácticas de laboratorio	✓	
2.14. Corrección de prácticas y prácticas de laboratorio	✓	✓
2.15. Elaboración de informes de evaluación continua	✓	✓
2.16. Dirección de proyectos y/o trabajos de fin de Grado	✓	
2.17. Supervisión de prácticum y/o prácticas externas	✓	
2.18. Dirección de tesis doctorales	✓	
3. Evaluación de los aprendizajes		
3.1 Elaboración de los distintos modelos de pruebas presenciales	✓	
3.2. Envalijado	✓	
3.3. Elaboración de plantillas de corrección	✓	
3.4. Participación en tribunales de exámenes	✓	Opcional
3.5. Corrección de exámenes	✓	
3.6. Valoración de actividades por informes de evaluación continua de los tutores	✓	
3.7. Introducción de calificaciones	✓	✓
3.8. Revisión de exámenes	✓	
3.9. Elaboración de actas	✓	
3.10. Participación en tribunales de fin de Grado y Máster	✓	
3.11. Participación en comisiones de evaluación de tesis doctorales	✓	

Tutorías en Centros Asociados

De acuerdo al Consejo de Gobierno de 7 de marzo de 2012, existen tres tipos de tutorías en función del número de estudiantes matriculados en la asignatura y su distribución geográfica, que proporcionan a los estudiantes los mismos servicios de orientación y apoyo.

a) **Tutoría de Centro:** El profesor tutor lleva a cabo sesiones de tutoría presenciales en un aula con los estudiantes durante entre 60 y 90 minutos que, a criterio del Centro, pueden ser transmitidas mediante Aulas Virtuales (AVIP o Teams) a los estudiantes del Centro Asociado.

b) **Tutoría de Campus:** Desde un Centro se tutoriza simultáneamente a estudiantes de otros Centros o Aulas del Campus. Las funciones y tareas son las mismas que en el caso anterior.

c) **Tutoría Intercampus:** Las asignaturas de cursos avanzados con pocos matriculados generan grupos de estudiantes muy pequeños, por lo que es necesario que un profesor tutor atienda a estudiantes de más de un campus. Esta modalidad de tutoría se aplica en asignaturas con menos de 400 estudiantes, asignando un profesor tutor por cada 40 estudiantes. En la tutoría intercampus, el profesor tutor realiza sesiones de tutoría, de una duración de 60 minutos, además de la participación activa en los foros de la asignatura.

De acuerdo a las directrices del equipo docente, el profesor tutor participa en la evaluación continua mediante la corrección de las Pruebas de Evaluación Continua (PEC).

Es importante señalar que la asignatura expuesta en este proyecto, "*Campos y formas* (61023050)", al ser un curso avanzado con pocos matriculados (151 estudiantes matriculados en el curso 2025/2026), **únicamente dispone de un tutor intercampus**.

RESUMEN DEL ACUERDO DE CONSEJO DE GOBIERNO SOBRE MODALIDADES DE TUTORIA EN LOS GRADOS (7 de marzo de 2012)

	TUTORÍA DE CENTRO	TUTORÍA DE CAMPUS	TUTORÍA INTERCAMPUS
	Asignaturas de Acceso, Primer Curso y cuando el número de estudiantes lo permita	Cuando el núm. de estudiantes no permita tutoría de Centro y haya más de 400 matriculados	Asignaturas con menos de 400 matriculados (1 tutor/40 estud). Se excluyen las asignaturas con prácticas presenciales
Designación Prof. Tutor	• Tutores con Venia del Dpto propuestos por Centro • Tutores interinos propuestos por Centro (la interinidad se limita a 2 años)		• A propuesta del E. Docente entre tutores en activo • Tutores con Venia del Dpto propuestos por Centro • Tutores interinos propuestos por Centro
SESIONES DE TUTORÍA	12 sesiones de 60’ en el aula del Centro	12 sesiones de 60’ en el aula del Centro **con transmisión por AVIP**	Máximo 12 sesiones de 60’ . Máximo 4 por tutor (Videoconferencia en aLF) *
	• Facilita orientaciones para la preparación de la asignatura • Aclara dudas de contenidos. • Realiza actividades prácticas. • Explica los criterios aplicados en la corrección de las PEC • Orienta para las pruebas presenciales • **GRABACIÓN VOLUNTARIA**		• Facilita orientaciones para la preparación de la asignatura • Aclara dudas de contenidos. • Realiza actividades prácticas. • Explica los criterios aplicados en la corrección de las PEC • Orienta para las pruebas presenciales • **GRABACION OBLIGATORIA**
SEGUIMIENTO C. VIRTUAL	• Informa en foro de tutoría sobre actividades en sesión de tutoría • No atiende dudas de contenido en foros. Estas se resuelven en los foros del Equipo Docente.		• Atiende en foros generales dudas sobre las sesiones de tutoría que imparta • En foro del grupo de tutoría mantiene contacto y hace el seguimiento de los estudiantes cuyas PECs corrige
EVALUACIÓN CONTINUA	• Corrección de Pruebas de Evaluación continua.		
FUNCIONES EQ. DOCENTE	• A través de las **Orientaciones del Tutor** indica las actividades que han de realizarse en cada sesión de tutoría • Progresivamente grabará orientaciones multimedia sobre contenidos asignatura		• A través de las **Orientaciones del Tutor** indica las actividades que han de realizarse en cada sesión de tutoría • Distribuye las sesiones entre los tutores • Progresivamente grabará orientaciones multimedia sobre contenidos asignatura

* En asignaturas de cursos avanzados el equipo docente podrá reemplazar total o parcialmente las sesiones de tutoría por la supervisión y dirección de trabajos o de actividades prácticas

1.7.3. Personal administrativo y de apoyo

Además del equipo docente y los profesores-tutores, el personal administrativo y técnico juega un papel crucial en la experiencia del estudiante. Este personal es responsable de garantizar que todos los aspectos logísticos y tecnológicos funcionen correctamente para que el estudiante pueda centrarse en su aprendizaje.

1) **Soporte técnico:** La plataforma en línea (Ágora, AVIP, etc.) es el principal medio de interacción entre el estudiante y la universidad. El personal técnico se asegura de que la plataforma esté operativa, actualizada y accesible.

2) **Atención al estudiante:** El personal administrativo responde a las consultas de los estudiantes relacionadas con la matrícula, el acceso a servicios universitarios, becas y gestiones académicas, facilitando el proceso burocrático que puede ser complicado en una institución a distancia.

1.8. Método de Evaluación

La evaluación en la UNED se puede formalizar a través de dos sistemas principales.

1. **Examen único:** Las Pruebas Presenciales o exámenes tienen lugar en los centros UNED en tres periodos concretos del año: las convocatorias ordinarias de febrero y junio y la convocatoria extraordinaria de septiembre.

2. **Evaluación Continua:** Se desarrolla de forma general a lo largo del curso a través de las Pruebas de Evaluación Continua, cuya calificación pondera con la nota de la prueba presencial. En este punto podemos resaltar las llamadas "*PEC*", que normalmente son pruebas opcionales que se desarrollan durante el curso, y ayudan al estudiante a desarrollar sus procesos de aprendizaje de la asignatura.

Existe también un Examen Extraordinario de Fin de Carrera, habitualmente en diciembre, para alumnos/as que tengan pendientes hasta un máximo de dos asignaturas anuales o cuatro semestrales para finalizar el Grado.

Cada equipo docente es responsable de la forma de evaluación concreta de su asignatura, elaborando las pruebas y estableciendo los criterios de corrección y evaluación específicos, reflejados todos ellos en las guías docentes de cada asignatura. La evaluación se podrá complementar/completar con pruebas objetivas, de ensayo, trabajos empíricos, prácticas de laboratorio y otros trabajos complementarios, que el equipo docente desarrollará en estrecha colaboración con los profesores-tutores de los centros UNED. **En el apartado de "*metodología*" explicaremos en detalle la forma de evaluación explícita de la asignatura de *Campos y formas*.**

Pruebas Presenciales

Los exámenes o Pruebas Presenciales son pruebas escritas que se realizan de manera presencial en los Centros Asociados de la UNED nacionales y del extranjero, en los Centros Penitenciarios y en aquellos locales habilitados por la universidad para tal fin. Gracias a la extensa red de centros de la UNED y a su presencia en 19 países, los alumnos/as pueden realizar las pruebas presenciales en centros ubicados en más de 75 ciudades diferentes. Aunque lo habitual es que los estudiantes se presenten en los centros en los que están matriculados, existe la posibilidad de realizarlas en cualquier otro centro si así fuera necesario por motivos personales y/o profesionales.

Los estudiantes de la UNED tienen la oportunidad de elegir la fecha de examen de la asignatura dentro de las dos sesiones posibles (*1ª Semana* y *2ª Semana*) de las convocatorias ordinarias de febrero y junio o de la sesión única de la convocatoria extraordinaria de septiembre. Además de estas dos sesiones, existe la posibilidad de acceder a la *sesión de reserva*, que da la posibilidad al estudiante de realizar un examen fuera del día y hora fijados para esa o esas asignaturas en el calendario oficial de exámenes. Únicamente podrán concurrir a los exámenes de reserva aquellos estudiantes a quienes les coincidan *dos o más asignaturas en el mismo día y la misma hora*. En tal caso, el/la interesado/a deberá solicitarlo en el momento que entregue el ejercicio que le da derecho a ello, momento en el cual el tribunal comprobará que tal coincidencia se produce. Excepcionalmente, el presidente valorará la solicitud de realizar el examen por *causas extraordinarias*, que deberán haber quedado acreditadas con anterioridad a la fecha prevista para las pruebas de reserva, y la concederá o denegará, consultando, en su caso, al resto del tribunal.

En las convocatorias de febrero y junio, ningún estudiante podrá realizar más de tres exámenes de reserva y dispondrá de un tiempo máximo de cuatro horas, en una única sesión. En el caso de concurrir solamente a uno o dos exámenes, el tiempo máximo se ajustará a lo establecido en cada uno de ellos. En todo caso, se respetará el tiempo máximo establecido para la realización de los exámenes. Por otro lado, en la convocatoria de septiembre, los exámenes de reserva se llevarán a cabo en dos únicas sesiones, una por la mañana y otra por la tarde (según el día del examen).

Los Tribunales de Pruebas Presenciales están formados por profesores de la Sede Central y por los Directores de los Centros Asociados. Estos Tribunales, junto con las Comisiones de Apoyo al Tribunal (profesores tutores y/o PAS), velan por el adecuado desarrollo de las pruebas presenciales.

La UNED realiza este proceso, que conlleva la gestión de más de 300.000 exámenes, mediante la "*Valija virtual*", una aplicación informática que permite la digitalización y gestión de exámenes, facilitando así el traslado de los enunciados, su distribución en el aula, recogida y retorno de los mismos. La valija virtual ofrece, entre otros, información sobre la disposición del estudiante en el aula para la realización de la prueba presencial o el tiempo restante del que dispone para la realización del examen. Asimismo, el sistema ofrece al profesor diferentes herramientas para corregir el examen y, si este lo desea, permitir al estudiante ver dicha corrección.

La UNED también dispone de AvEx, una aplicación web para realizar exámenes a través de internet, ya sean de tipo test, desarrollo o mixtos. El sistema es accesible para personas con discapacidad visual, y funciona con cualquier dispositivo actualizado que tenga cámara y acceso a internet. Los exámenes del curso 2020-2021 se realizaron a través de esta plataforma.

Por último, se establece el presente *Protocolo de Evaluación Alternativa Individualizada (EAI)*, entendiendo que circunstancias excepcionales pueden limitar la capacidad de algunos estudiantes para participar en evaluaciones presenciales.

El Protocolo de EAI tiene como objetivo principal ofrecer un marco regulador que garantice el derecho a la evaluación de aquellos y aquellas estudiantes que, por razones de salud debidamente justificadas mediante documentación médica oficial, se encuentren imposibilitados de asistir a las pruebas presenciales en el Centro Asociado. En este proceso, participan *UNIDIS*, la Vicesecretaría General de Pruebas Presenciales, la Secretaría de Facultad o Escuela y los equipos docentes de las asignaturas objeto de esta adaptación.

1.9. El Grado en Matemáticas en la UNED

En los últimos años, la demanda de matemáticos por parte de la sociedad ha crecido notablemente; muestra de ello es el aumento durante los últimos cursos académicos en el número de estudiantes que eligen esta carrera, así como por el incremento sistemático de las notas requeridas para ingresar a dichos estudios. El Grado en Matemáticas ofrece una amplia formación, destacándose por su rigor académico, desarrollo del pensamiento crítico y la aplicabilidad de las matemáticas en múltiples campos, lo que garantiza una alta tasa de empleabilidad para sus graduados.

Objetivos

El Grado en Matemáticas busca lograr una serie de objetivos que se distribuyen en tres áreas principales:

Objetivos académicos

- Formación científica en los aspectos básicos y aplicados de las Matemáticas.
- Desarrollo en las capacidades analíticas y de abstracción, la intuición y el pensamiento lógico y riguroso a través del estudio de las Matemáticas.

- Capacitación para la utilización de los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos en la definición y planteamiento de problemas y en la búsqueda de sus soluciones en contextos académicos.
- Preparación para posteriores estudios especializados, tanto en una disciplina matemática como en cualquiera de las ciencias que requieran buenos fundamentos matemáticos.

Objetivos profesionales

- Capacitación para la utilización de los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos en la definición y planteamiento de problemas y en la búsqueda de sus soluciones en contextos profesionales.
- Cualificación para la formulación matemática, análisis, resolución y, en su caso, tratamiento informático de problemas en diversos campos interdisciplinares de las ciencias básicas, ciencias sociales y de la vida, ingeniería, finanzas, consultoría, etc. con vistas a las aplicaciones, los desarrollos científicos y/o docencia.
- Posibilitar el acceso directo al mercado de trabajo en puestos con un nivel de responsabilidad adecuado al título de grado.

Objetivos sociales

- Conocimiento de la naturaleza, métodos y fines de los distintos campos de la Matemática junto con cierta perspectiva histórica de su desarrollo.
- Reconocimiento de la presencia de la Matemática subyacente en la naturaleza, a través de la Ciencia, la Tecnología y el Arte. Reconocer a la Matemática como parte integrante de la Educación y la Cultura.
- Obtención de un nivel académico que permita el desarrollo en un contexto abierto, multicultural y en constante transformación, como es el campo de las Matemáticas.

Plan de estudios y asignaturas

El Grado en Matemáticas consta de un total de 240 créditos ECTs, repartidos en asignaturas de tipo:

- Básico: Asignaturas de carácter general dentro de una rama de conocimiento.
- Obligatorio: Asignaturas específicas de la titulación.
- Optativo: A elegir por el alumno.
- Trabajo de Fin de Grado.

Cada curso comprende un total de 60 créditos distribuidos del siguiente modo:

- Primer curso: 9 asignaturas de formación básica y una obligatoria.

- Segundo curso: 2 asignaturas de formación básica y 8 obligatorias.
- Tercer curso: 10 asignaturas obligatorias de 6 créditos.
- Cuarto curso: 9 asignaturas optativas a elegir por el alumno de una oferta de 18 asignaturas y un trabajo de Fin de Grado de 15 créditos.

Primer Curso

SEMESTRE 1			
Código	**Nombre**	**Carácter**	**Créditos**
61021016	ÁLGEBRA LINEAL I	FORMACIóN BÁSICA	6
61021022	FUNCIONES DE UNA VARIABLE I	FORMACIÓN BÁSICA	6
61021039	LENGUAJE MATEMáTICO, CONJUNTOS Y NúMEROS	FORMACIÓN BÁSICA	6
61021045	ESTADÍSTICA BáSICA	FORMACIÓN BáSICA	6
61021051	MATEMáTICA DISCRETA	FORMACIÓN BáSICA	6
SEMESTRE 2			
61021068	ÁLGEBRA LINEAL II	FORMACIÓN BÁSICA	6
61021074	FUNCIONES DE UNA VARIABLE II	FORMACIÓN BÁSICA	6
61021080	FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I	OBLIGATORIA	6
61021097	FÍSICA	FORMACIóN BáSICA	6
61021105	GEOMETRÍA BáSICA	FORMACIóN BáSICA	6

Segundo Curso

SEMESTRE 1			
Código	**Nombre**	**Carácter**	**Créditos**
61022010	GEOMETRÍAS LINEALES	OBLIGATORIA	6
61022027	FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II	OBLIGATORIA	6
61022033	CÁLCULO DE PROBABILIDADES I	OBLIGATORIA	6
6102204-	ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS	OBLIGATORIA	6
61022056	HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS PARA MATEMÁTICAS	OBLIGATORIA	6
SEMESTRE 2			
61022062	PROGRAMACIÓN LINEAL Y ENTERA	FORMACIÓN BÁSICA	6
61022079	VARIABLE COMPLEJA	OBLIGATORIA	6
61022085	ANÁLISIS NUMÉRICO MATRICIAL E INTERPOLACIÓN	OBLIGATORIA	6
61022091	ÁLGEBRA (MATEMÁTICAS)	OBLIGATORIA	6
6102210-	LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN	FORMACIÓN BÁSICA	6

Tercer Curso

SEMESTRE 1			
Código	**Nombre**	**Carácter**	**Créditos**
61023015	TOPOLOGÍA	OBLIGATORIA	6
61023021	INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	OBLIGATORIA	6
61023038	CÁLCULO DE PROBABILIDADES II	OBLIGATORIA	6
61023044	INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT	OBLIGATORIA	6
61023050	CAMPOS Y FORMAS	OBLIGATORIA	6
SEMESTRE 2			
61023067	GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES	OBLIGATORIA	6
61023073	ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES	OBLIGATORIA	6
6102308-	RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES	OBLIGATORIA	6
61023096	MODELIZACIÓN	OBLIGATORIA	6
61023104	INFERENCIA ESTADÍSTICA (MATEMÁTICAS)	OBLIGATORIA	6

Cuarto Curso

ANUALES			
Código	**Nombre**	**Carácter**	**Créditos**
61024167	TRABAJO FIN DE GRADO (MATEMÁTICAS)	TRABAJO FINAL OBLIGATORIO	15
SEMESTRE 1			
6102401-	INTEGRAL DE LEBESGUE	OPTATIVA	5
61024032	AMPLIACIÓN DE VARIABLE COMPLEJA	OPTATIVA	5
61024049	GEOMETRÍA DIFERENCIAL	OPTATIVA	5
61024055	PROCESOS ESTOCÁSTICOS	OPTATIVA	5
61024078	TEORÍA DE LA DECISIÓN	OPTATIVA	5
61024084	INTRODUCCIÓN A LA ASTRONOMÍA	OPTATIVA	5
61024115	MODELOS DE REGRESIÓN	OPTATIVA	5
61024121	TEORÍA DE JUEGOS (MATEMÁTICAS)	OPTATIVA	5
61024173	ANÁLISIS MULTIVARIANTE (MATEMÁTICAS)	OPTATIVA	5
61044081	FÍSICA MATEMÁTICA	OPTATIVA	5
SEMESTRE 2			
61024026	ESPACIOS NORMADOS	OPTATIVA	5
61024061	MODELOS ESTOCÁSTICOS	OPTATIVA	5
61024090	AMPLIACIÓN DE TOPOLOGÍA	OPTATIVA	5
61024109	HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS	OPTATIVA	5
61024138	TEORÍA DE MUESTRAS	OPTATIVA	5
61024150	INGLÉS CIENTÍFICO	OPTATIVA	5
61044098	SISTEMAS DINÁMICOS	OPTATIVA	5
61044112	ASTROFÍSICA GENERAL	OPTATIVA	5

Capítulo 2

Asignatura: Campos y Formas (61023050)

Estructura y fundamentación

2.1. Presentación de la asignatura

La asignatura "*Campos y Formas*" (Cód. 61023050) representa una evolución natural del cálculo de una y varias variables, extendiendo los conceptos fundamentales del análisis multivariable, como la derivada e integral, a funciones definidas sobre objetos más generales: *las variedades diferenciables*; estructuras geométricas que, localmente, se asemejan a los espacios euclídeos, pero que pueden tener formas considerablemente más complicadas. Este campo de estudio es fundamental en numerosas áreas de las matemáticas y la física, desde la teoría de la relatividad hasta la física de partículas. Como casos particulares se trabajan las superficies y los caminos diferenciables.

Dentro de este marco se demostrarán resultados centrales, como el lema de Poincaré y el teorema de Stokes, que unifica y generaliza diversos teoremas clásicos del cálculo vectorial (primer teorema fundamental del cálculo, Green, Divergencia, Stokes clásico) y proporciona, además, un lenguaje conceptual común para la formulación moderna de problemas geométricos y físicos. Entre los múltiples empleos de este teorema en la asignatura se destaca el *cálculo de volúmenes*, puesto que es una aplicación cuyo potencial es fácilmente perceptible por los estudiantes. Además, como factor motivador y más allá del contenido evaluable de la asignatura, se explorarán diversas aplicaciones de este teorema, como el teorema del punto fijo de Brouwer o el teorema fundamental del álgebra. Estas aplicaciones buscan motivar e incentivar la curiosidad del alumno/a, puesto que destacan por «*inesperadas*»; un resultado de geometría diferencial que tiene como consecuencia resultados clásicos en análisis matemático, topología y álgebra.

La asignatura se ubica en el primer cuatrimestre del tercer curso del grado de Matemáticas de la UNED, con una carga lectiva de 6 ECTS y carácter obligatorio. Al ser una asignatura de tercer curso de un grado como el de Matemáticas, el número de alumnos/as no suele ser muy grande (en comparación con la media de la UNED). Generalmente, se encontrará entre 100 y 200 estudiantes por año. Más específicamente, en el curso 2025/2026 se *matricularon 151 estudiantes en la asignatura*. De esta manera, como se ha comentado, *Campos y formas* únicamente tiene asignado un profesor-tutor, que resulta estar en la modalidad *intercampus* (las funciones específicas del tutor/a se detallan más adelante).

Es importante señalar que la propuesta de la asignatura **difiere significativamente de la que se impartía en cursos anteriores** en el mismo grado en la UNED. Así, se ha creído conveniente aportar una presentación detallada de los motivos del cambio del enfoque de la asignatura, así como del contenido de la misma (véase sección 2.10).

Motivaciones de la propuesta

Antes de detallar los cambios mencionados, resulta conveniente especificar los motivos de dichos cambios:

1. **Notación:** La notación empleada en la asignatura en cursos anteriores presentaba cierta falta de coherencia en comparación con la notación utilizada en otras asignaturas del Grado en Matemáticas, especialmente en aquellas directamente relacionadas con el estudio de los *campos de vectores* y las *formas diferenciales* (véase sección 2.5). En este sentido, se ha propuesto un cambio en la notación con el fin de mejorar la cohesión del grado y facilitar una comprensión más integral por parte del estudiante.

2. **Conexiones:** *Campos y formas* es una asignatura con un alto grado de interconexión con otras materias del Grado en Matemáticas. Por tanto, se pretende aprovechar dicha característica, destacando y maximizando estas conexiones para enriquecer la experiencia educativa del alumnado (véase de nuevo la sección 2.5).

3. **Estructura:** En años anteriores, la estructura de la asignatura se organizaba de manera que el nivel de generalización se incrementaba progresivamente. Primero se abordaba el desarrollo para curvas, posteriormente se presentaba el análogo para superficies y, finalmente, se generalizaba a variedades diferenciables. Sin embargo, este enfoque relegaba el estudio de las "*formas*" al final del curso, lo que, debido a la extensión del contenido previo, reducía este apartado a un enfoque casi puramente teórico y residual.

   Para solventar esta situación, se ha modificado la estructura de la asignatura, comenzando directamente por el caso más general, las variedades, y obteniendo todo el contenido sobre curvas y superficies como casos particulares, como corolarios (véase sección 2.10 para más detalles sobre la nueva estructura).

4. **Pensamiento abstracto:** Una de las principales razones para la modificación de la estructura es el fomento del desarrollo y la percepción del pensamiento abstracto en el alumnado. Comenzar con el caso más general permite al estudiante ejercitar y fortalecer esta capacidad, tan importante en el ámbito de las matemáticas. Además, este enfoque resalta la utilidad y el poder del pensamiento abstracto, ya que al trabajar en un contexto tan general como el de las variedades diferenciables, se pueden deducir de manera directa los resultados relativos a curvas y superficies. Este hecho no solo justifica el uso de la abstracción, sino que también subraya y ayuda al alumnado a comprender su relevancia dentro del campo de las matemáticas.

5. **Metodología docente e innovaciones digitales:** Se busca la inclusión de diversas estrategias o metodologías docentes, que pretenden servir como estímulo para el aprendizaje de la asignatura (véase sección 2.8, sección 2.9 y

sección 2.10), alineando la asignatura con el *compromiso con la mejora continua* citado en el item 8, donde se describen algunas características clave que un docente de la UNED debería tener, y en los ítems 4 y 8, de los objetivos y finalidades iniciales de esta universidad, publicados en el folleto titulado *Universidad Nacional a Distancia. Nuevos horizontes de la universidad*.

2.2. Competencias y Resultados de Aprendizaje

Las **competencias** que adquiere el estudiante en esta asignatura son las siguientes:

- **BÁSICAS Y GENERALES**:

  CG4 Análisis y síntesis.

  CG5 Aplicación de los conocimientos a la práctica.

  CG6 Razonamiento crítico.

  CG13 Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica.

- **ESPECÍFICAS:**

  CED1 Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las matemáticas superiores.

  CED2 Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos.

  CEP4 Resolución de problemas.

  CEA1 Destreza en el razonamiento y capacidad para utilizar sus distintos tipos, fundamentalmente por deducción, inducción y analogía

  CEA2 Capacidad para tratar problemas matemáticos desde diferentes planteamientos y su formulación correcta en lenguaje matemático, de manera que faciliten su análisis y resolución. Se incluye en esta competencia la representación gráfica y la aproximación geométrica.

  CEA3 Habilidad para crear y desarrollar argumentos lógicos, con clara identificación de las hipótesis y las conclusiones.

  CEA4 Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento, ya sea de forma teórica o práctica, mediante la búsqueda de contraejemplos.

  CEA8 Capacidad de relacionar distintas áreas de las matemáticas.

Por otro lado, los **resultados de aprendizaje** de la asignatura se encuentran recogidos en la guía oficial de estudio, y son los siguientes:

- Conocimiento básico sobre variedades diferenciales.
- Uso, manejo y operaciones con formas diferenciales y campos.

- Diferenciación e integración de formas diferenciales.
- Uso e interpretación geométrica de los teoremas clásicos: Stokes, Green, divergencia.
- Manejo de herramientas básicas de formas y campos para aplicaciones.

No obstante, los resultados de aprendizaje se detallan en la subsección 2.10.4.

2.3. Bibliografía básica y complementaria

La bibliografía de la asignatura se compone del texto base titulado "*Integración en variedades*" [13] cuyo contenido, estructura, diseño y motivación pedagógica se detalla en la subsección 2.10.1, dentro de la sección encargada de explicitar las innovaciones implementadas en la asignatura.

Aparte de la bibliografía básica, se recomiendan tres libros como *bibliografía complementaria*:

- Introduction to smooth manifolds [16]:
  Este libro cubre todo el contenido de la asignatura, aportando incluso más contenido para el estudiante motivado. Un aspecto interesante de este libro es que está disponible de manera *gratuita* en la web, así que al estudiante no le supone ningún esfuerzo económico extra.
- Calculus on Manifolds: A Modern Approach To Classical Theorems Of Advanced Calculus [25]:
  De nuevo, estamos ante un texto que el estudiante puede encontrar en abierto en internet. En este caso, el libro está más enfocado en la parte de integración en variedades, teniendo contenido extra que introduce al lector en el área de "*Teoría de la medida*".
- Differential Forms and Applications [5]:
  Por último, se recomienda un libro de tamaño reducido (120 páginas) que lidia sobre todo con el tema de integración en variedades, aportando, en algunos puntos, una visión intuitiva. Además, en los últimos capítulos añade algunos ejemplos a los presentados ya en la signatura.

Aparte del material escrito recomendado, en el campus de la asignatura se compartirán más recursos que se detallarán más adelante.

2.4. Comparativa con otros programas académicos

La incorporación de un curso avanzado de cálculo diferencial e integral en variedades en el programa de grado responde a la necesidad de equipar a los estudiantes con habilidades en el análisis y la comprensión de estructuras matemáticas complejas aplicadas en diversas áreas de las ciencias exactas e ingeniería. En esta sección, se presenta un análisis comparativo de asignaturas similares en instituciones de renombre, que han implementado cursos dedicados a la geometría y cálculo diferencial en variedades diferenciables en sus programas avanzados de matemáticas. Estas asignaturas incluyen temas clave como variedades diferenciables, formas diferenciales, integración sobre variedades y teoremas fundamentales (como el teorema de Stokes generalizado), los cuales son esenciales para la formación de un matemático competente en teoría y aplicaciones de las estructuras geométricas.

Se han seleccionado programas de universidades tanto en España, como a nivel internacional, tales como la *Universidad de Granada* y la *Hong Kong University of Science and Technology (HKUST)*, cuyo curso "*Calculus on Manifolds*" proporciona una base teórica sólida y se ofrece a estudiantes en niveles avanzados de grado. Al presentar estos casos, se evidencia la creciente importancia de una formación integral en estas áreas dentro de la matemática moderna, subrayando la relevancia de incluir un curso similar en nuestro currículo académico como una experiencia de aprendizaje obligatoria en los últimos años de formación universitaria.

Universidad de Granada (UGR)

En esta universidad se oferta una asignatura con el nombre de "*Variedades diferenciables*" (27011C2), que lleva el siguiente programa:

- **Tema 1. Nociones básicas.**
  - Concepto de variedad diferenciable.
  - Aplicaciones diferenciables entre variedades.
  - Difeomorfismos.
  - Espacios tangente y cotangente.
  - La diferencial de una aplicación diferenciable.
  - Clasificación de aplicaciones diferenciables según el rango de su diferencial.
- **Tema 2. Campos de vectores.**
  - Campos de vectores. Flujo de un campo de vectores.
  - Álgebra de Lie de campos de vectores.
- **Tema 3. Formas diferenciales**
  - Formas diferenciales exteriores. El álgebra exterior.
  - Diferencial exterior de formas diferenciales.
  - Formas cerradas y exactas.
  - Producto interior y derivada de Lie.

- **Tema 4. Integración en Variedades**
  - Integración sobre una superficie
  - Orientación en variedades. Formas de volumen.
  - Dominios con borde en una variedad orientada.
  - Integración de formas diferenciales en dominios de variedades orientadas.
- **Tema 5. Teorema de Stokes**
  - Orientación inducida en el borde de un dominio con
  - Borde diferenciable.
  - Teorema de Stokes sobre una superficie
  - Teorema de Stokes.
  - Algunas consecuencias: teorema de Green, teorema de la divergencia y teorema clásico de Stokes.

Es notable el hecho de que esta asignatura, aunque bastante similar, contiene un programa con más contenido que el de *Campos y formas* (flujo de campos de vectores, estructura de álgebra de Lie del espacio de campos de vectores, ...). Esto se puede fundamentar en el hecho de que esta asignatura se encuentra en cuarto curso, y es, además, optativa.

University of Manchester

La asignatura llamada "*Differentiable Manifolds*" (MATH31061), de tercer curso del grado de matemáticas de la University of Manchester, cubre el siguiente programa:

- Manifolds and smooth maps. Coordinates on familiar spaces. Charts and atlases. Definitions of manifolds and smooth maps. Products. Specifying manifolds by equations. More examples of manifolds.
- Tangent vectors. Velocity of a curve. Tangent vectors. Tangent bundle. Differential of a map.
- Topology of a manifold. Topology induced by manifold structure. Identification of tangent vectors with derivations. Bump functions and partitions of unity. Embedding manifolds in $\mathbb{R}^n$.
- Tensor algebra. Dual space, covectors and tensors. Einstein notation. Behaviour under maps. Tensors at a point. Example: differential of a function as covector.
- Vector fields. Tensor and vector fields. Examples. Vector fields as derivations. Flow of a vector field. Commutator.
- Differential forms. Antisymmetric tensors. Exterior multiplication. Forms at a point. Bases and dimensions. Exterior differential: definition and properties.

- Integration. Orientation. Integral over a compact oriented manifold. Independence of atlas and partition of unity. Integration over singular manifolds and chains. Stokes theorem.
- De Rham cohomology. Definition of cohomology and examples of nonzero classes. Poincaré Lemma. Examples of calculation.

Es de nuevo notable que este programa cubra más contenido que la asignatura de *Campos y formas*. El motivo podría radicar en que, previo a dicha asignatura, los estudiantes toman el curso "*Introduction to Geometry*" (MATH20222), en el que se realiza parte del trabajo sobre tensores en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Hong Kong university of science and technology (HKUST)

En esta universidad podemos encontrar la asignatura "*Calculus on Manifolds*" (MATH 4033), cuyo programa es:

- **Integration on Submanifold of $\mathbb{R}^n$**
  Length of curve, integral along curve, area of surface, integral along surface, volume of submanifold, integral along submanifold.
- **Stokes' Theorem in $\mathbb{R}^n$**
  Green's theorem, antiderivative in $\mathbb{R}^2$, Stokes' theorem, antiderivative in Rn, Gauss' theorem.
- **Differentiation on Manifold**
  differentiable manifold, tangent vector, differential of map between differentiable manifolds, differentiation theory on manifold, orientability.
- **Integration on Manifold**
  multilinear algebra, cotangent vector, partition of unity, integration.
- **Stokes' Theorem on Manifold**
  Differentiation of form, Poincaré lemma, deRham cohomology.

Aunque el sistema universitario de HKUST difiere notablemente del regido por el EEES (al ser más flexible, modular y menos normativamente homogéneo, y estar centrado en cursos individuales articulados mediante prerrequisitos), cabe interpretar que esta asignatura se sitúa en la etapa final del grado. Este hecho permite explicar, al menos en parte, la aparente mayor densidad de contenidos que presenta.

A pesar de que uno puede encontrar muchas otras universidades con programas similares, este análisis de programas académicos en instituciones de alta calidad académica evidencia que el programa de la asignatura centrada en el cálculo diferencial en variedades diferenciables resulta fundamental para una formación completa y actualizada en matemáticas avanzadas. El programa de la asignatura garantiza que los estudiantes cuenten con un dominio exhaustivo de técnicas y teoremas fundamentales el variedades, como el teorema de Stokes y el lema de Poincaré, que constituyen la base teórica de muchas aplicaciones científicas modernas. Por lo tanto, *el programa presentado responde no solo a un estándar académico internacional, sino también a la demanda de profesionales capacitados en la interpretación y uso de estructuras geométricas avanzadas.*

2.5. Conexiones con otras asignaturas

La asignatura de *Campos y formas* forma parte de la materia "*Matemáticas Transversales*", ya que abarca conceptos y técnicas propias de las disciplinas de "*Análisis Matemático*" y "*Geometría y Topología*". De hecho, una *característica fundamental de esta asignatura* radica en la cantidad de conexiones directas o indirectas que tiene con otras muchas asignaturas del mismo grado de Matemáticas.

Por un lado, la asignatura está directamente relacionada con las asignaturas "*Funciones de una variable I*" (61021022), "*Funciones de una variable II*" (61021074), "*Funciones de varias variables I*" (61021080), y "*Funciones de varias variables II*" (*61021022*), las cuales se desarrollan entre primero y segundo curso del Grado de Matemáticas y tienen carácter de formación básica y obligatorias, respectivamente. En este caso, como se ha mencionado, la asignatura de *Campos y formas* sigue **un curso natural de generalización del cálculo diferencial e integral**: se comienza por una variable ("*Funciones de una variable I*" y "*Funciones de una variable II*"), se generaliza este estudio a más variables ("*Funciones de varias variables I*" y "*Funciones de varias variables II*") y, finalmente, se trabaja en el caso en el que el «*espacio de las variables*» pueda tomar otras «*formas*». Una manera intuitiva de imaginar el tipo de espacios en los que van a vivir nuestras variables (las *variedades diferenciables*), es imaginar que las variables en cuestión tienen algún tipo de «*ligadura*». Por ejemplo, uno podría buscar trabajar en el espacio de todas las $n-$uplas reales cuya norma es constante (lo que resulta en una esfera).

En el mismo semestre que *Campos y formas* está localizada la asignatura obligatoria de "*Topología*" (61023015). Esta asignatura tiene también relación directa con *Campos y formas*, puesto que las variedades diferenciables se definen como un tipo específico de espacio topológico (Hausdorff, segundo contable y localmente euclídeo). Además, un tipo de variedades diferenciables que van a cobrar una importancia especial son las variedades *compactas*, que es una propiedad topológica. Así, las propiedades topológicas van a tener un rol relevante en el desarrollo de la asignatura.

Inmediatamente posterior a la asignatura de *Campos y formas*, se presenta la asignatura de "*Geometría diferencial de curvas y superficies*" (61023067), que se estudia en el segundo semestre del tercer curso del grado de Matemáticas, y tiene carácter obligatorio. En esta asignatura se profundiza en el estudio de los que quizá se podrían entender como los ejemplos más sencillos de variedades diferenciables no euclídeas: *curvas* (dimensión 1) y *superficies* (dimensión 2). De esta manera, esta asignatura tiene una obvia relación directa con *Campos y formas* donde, entre otras cosas, se introducen por primera vez los conceptos de curva y superficie, y se estudia su relación con la noción de variedad diferenciable.

En cuarto curso del grado de Matemáticas se encuentra la asignatura de "*Geometría diferencial*" (61024049), con carácter optativo. Análogamente al rol de la asignatura de *Geometría diferencial de curvas y superficies* sobre las curvas y las superficies, esta asignatura explora en detalle el mundo de las variedades diferenciables. Así, *Campos y formas* se entiende como asignatura que estudia el cálculo diferencial e integral en variedades diferenciables y que sirve de *andamio* para la asignatura de *Geometría diferencial*; que es la que entra en detalle en los conceptos y técnicas, propiedades de la teoría de variedades diferenciables.

Más adelante, en el *Máster en Matemáticas Avanzadas* de la UNED, se encuentran dos asignaturas directamente relacionadas con *Campos y formas*: "*Geometría diferencial*" (21152330) y "*Superficies de Riemann*" (2115235-), ambas en los planes de estudio de *Análisis matemático (2023)*, *Geometría y Topología (2023)* y *Matemática aplicada (2023)*. La primera de estas asignaturas supone una evolución natural de su homóloga en el Grado de Matemáticas (*Geometría diferencial*), y se profundiza aún más en el estudio de las variedades diferenciables. *Superficies de Riemann* se centra en el estudio de las superficies que disponen de una *métrica Riemanniana*.

Por último, *Campos y formas* está conectada de manera indirecta con otras muchas asignaturas del grado de Matemáticas. En particular, se quisieran resaltar las asignaturas de "*Álgebra Lineal I*" (61021016) y "*Álgebra Lineal II*" (61021068), ambas de formación básica. El mismo espacio tangente de una variedad es, por construcción, un espacio vectorial con una base bien definida. Además, los campos vectoriales son aplicaciones que asignan a cada punto de una variedad un vector en un espacio vectorial. Por otro lado, las formas diferenciales, son, por definición, aplicaciones lineales sobre espacios vectoriales. Estas tres nociones son únicamente tres de los muchos ejemplos de conceptos y técnicas del álgebra lineal que se encuentran, de manera natural, en la asignatura de *Campos y formas*. Las otras dos asignaturas de Geometría anteriores a *Campos y formas*, "*Geometría básica*" (61021105) y "*Geometrías lineales*" (61022010) (formación básica y obligatoria, respectivamente), tienen también una relación destacable con *Campos y formas*, dado que trabajan con conceptos que están *vinculados* estrechamente con la noción de variedad diferenciable, como los espacios métricos y los espacios afines.

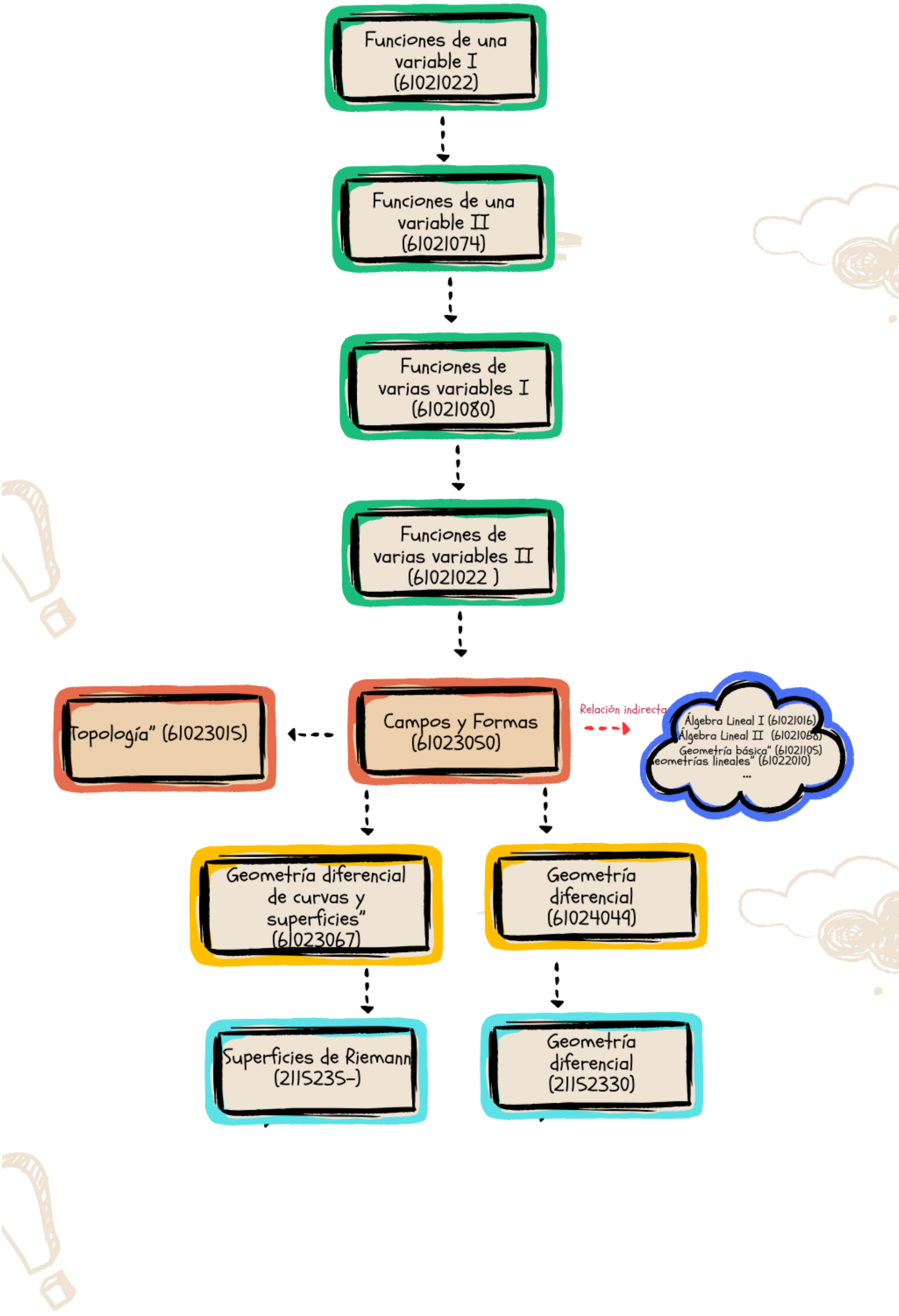


Figura 2.1: Resumen gráfico de las conexiones de la asignatura dentro del grado.

El alto grado de conexión que tiene esta asignatura se aprovechará no solo en el diseño de los ejercicios y actividades, sino en la composición del texto mismo de la asignatura. Además, se procurará que la notación y definiciones que se usen en la asignatura coincidan con las que se usan en las asignaturas que se relacionan directa o indirectamente con la asignatura. Recordemos que el establecimiento de estas conexiones permite que el aprendizaje no sea aislado, sino que se integre dentro de una estructura cognitiva más amplia (aprendizaje significativo, D. Ausubel sección 2.8).

2.5.1. Prerrequisitos

Utilizando como base las conexiones detalladas, para abordar los contenidos de esta asignatura, el estudiante debe manejar con soltura las técnicas de integración en una y en varias variables, así como los resultados teóricos básicos propios de la teoría de la integración, como el teorema fundamental del cálculo o el teorema del cambio de variable. También será necesario que conozca otros de los resultados teóricos fundamentales del Análisis Matemático, como el teorema del valor medio y los teoremas de la función inversa, que son necesarios para desarrollar los contenidos teóricos de esta asignatura.

Por estas razones se recomienda al estudiante haber superado las cuatro asignaturas de "*Análisis Matemático*" citadas, que se dan en los cursos primero y segundo de grado de matemáticas de la UNED, a saber: *Funciones de una variable I y II y Funciones de varias variables I y II.*

Por otro lado, el estudiante debe estar familiarizado con nociones básicas de Geometría y de Algebra, como espacio vectorial, base de un espacio, determinantes, aplicaciones lineales, producto vectorial, etc., todas ellas incluidas en los contenidos de las asignaturas "*Geometría básica*" y "*Álgebra lineal I*" del grado de Matemáticas de la UNED.

2.6. Estructura de la asignatura en Ágora

En la subsección 1.6.1, se han descrito el funcionamiento y la estructura de la plataforma Ágora. Es pertinente, en este punto, especificar en mayor detalle la organización del campus virtual correspondiente a la asignatura *Campos y Formas.* A continuación, se presenta la estructura que ha empezado a adoptar en dicha asignatura en la plataforma:

- **General:** En esta pestaña, contenida por defecto en todos los cursos de la UNED, vamos a incluir los siguientes *temas*:

    - Una primera cabecera donde se tendrán recursos generales, como los foros de "*Avisos*" y "*Anuncios*", o la "*Guía de la asignatura*" (véase figura 2.2).

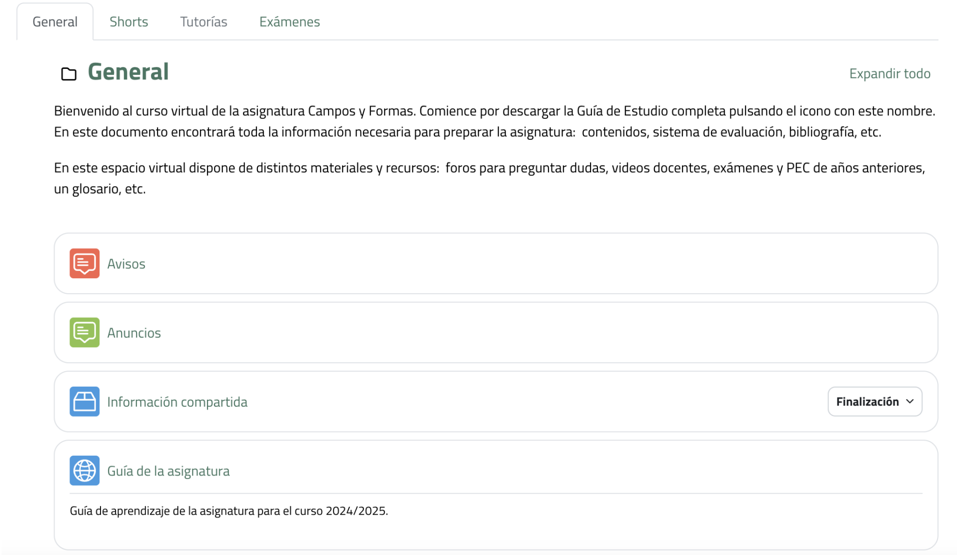


Figura 2.2: General

- **Material de la asignatura:** En este tema colgaremos cualquier material que no sea un vídeo, que pueda ayudar en la asignatura (véase figura 2.3, que contiene ejemplos de material adjunto a la asignatura).

Figura 2.3: Material de la asignatura

- **Vídeos de la asignatura:** Aquí se colgarán vídeos realizados para mejorar el proceso de aprendizaje de la asignatura y vídeos que, aunque pudieran no estar realizados expresamente para la asignatura, puedan resultar de utilidad (véase figura 2.4 para un ejemplo).

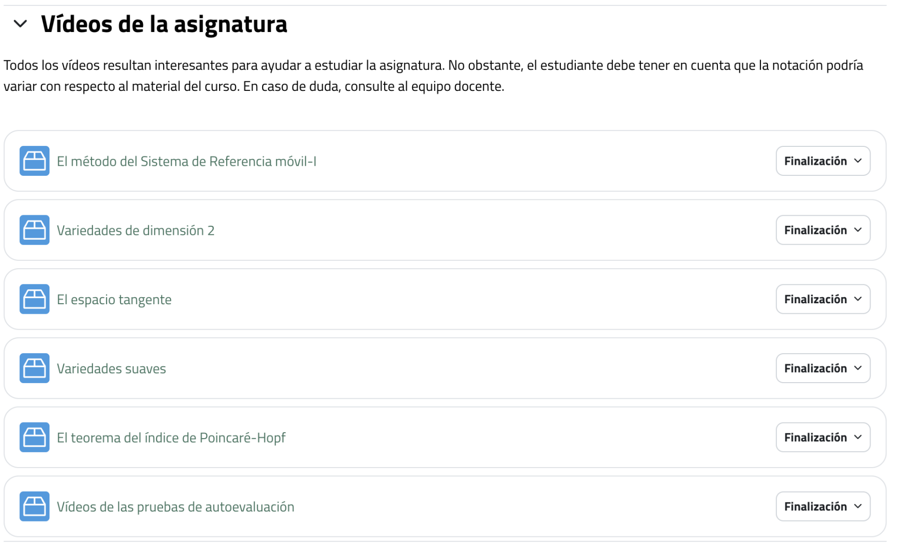


Figura 2.4: Vídeos de la asignatura

- **Foros:** Este tema estará dedicado a una parte crucial de toda asignatura en la UNED: los foros. En particular, contendrá un foro sobre consultas generales de la asignatura, donde se espera que el estudiante plantee preguntas sobre temas generales (forma de evaluación, contenido de la asignatura, etc.). Por otro lado, los tres bloques de la asignatura (fundamentos, cálculo diferenciable y cálculo integral) se van a subdividir en cuatro foros (separando los "*campos y formas*" del cálculo diferencial), y se va a añadir un foro sobre las mencionadas "*Aplicaciones*", para que cualquier estudiante pueda plantear dudas sobre este tema (aunque esté exento de evaluación). Finalmente, se añade un foro para que los/as alumnos/as puedan realizar sugerencias sobre el texto base actual, y uno para uso exclusivo de los estudiantes (véase figura 2.5).
- **Preguntas frecuentes:** Finalmente, dispondremos de un tema que contiene un recurso de "*Preguntas frecuentes*", que se mantendrá actualizado con las preguntas que más veces realicen los estudiantes en los foros (véase figura 2.6).

- **Shorts:** En esta pestaña se colgarán los mencionados vídeos cortos realizados por el equipo docente para incluir en el texto base (véase figura 2.7 para un

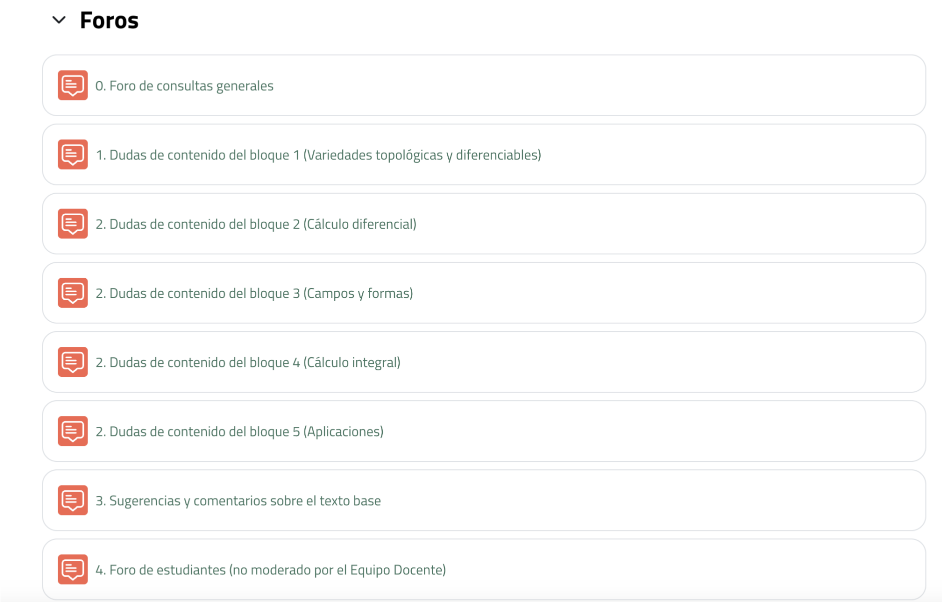


Figura 2.5: Foros

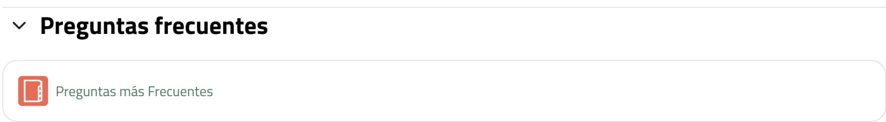


Figura 2.6: Preguntas frecuentes

ejemplo). Así, estarán disponibles para todos los estudiantes.

Figura 2.7: Vídeos cortos

- **Tutorías:** Aquí se subirán las tutorías virtuales que se propone que realice el/la tutor/a intercampus (véase figura 2.8 como ejemplo del curso).

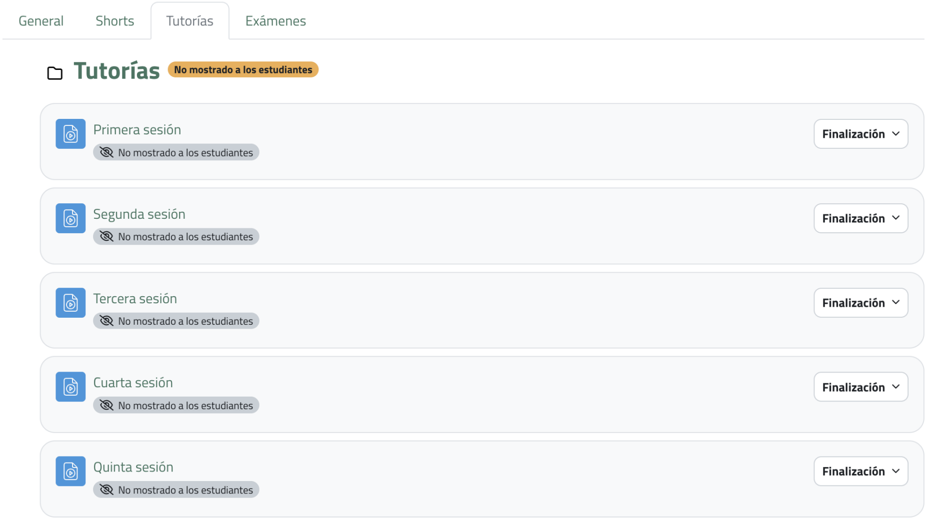
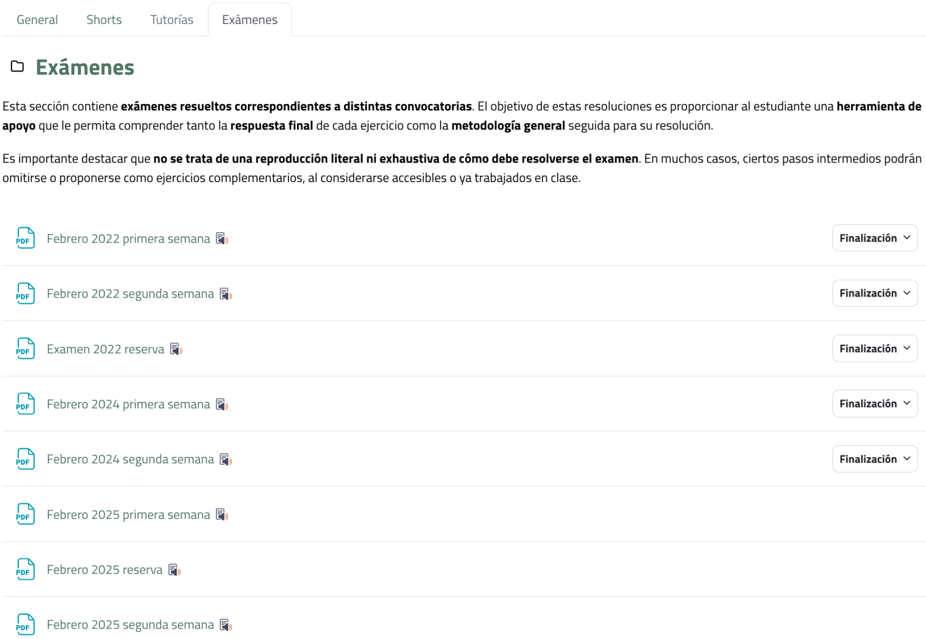


Figura 2.8: Tutorías

- **Exámenes:** Por último, en esta pestaña se colgarán los exámenes y PECs previamente realizados en la asignatura, con las respectivas soluciones (véase figura 2.9 como ejemplo real).



General Shorts Tutorías Exámenes

Exámenes

Esta sección contiene **exámenes resueltos correspondientes a distintas convocatorias**. El objetivo de estas resoluciones es proporcionar al estudiante una **herramienta de apoyo** que le permita comprender tanto la **respuesta final** de cada ejercicio como la **metodología general** seguida para su resolución.

Es importante destacar que **no se trata de una reproducción literal ni exhaustiva de cómo debe resolverse el examen**. En muchos casos, ciertos pasos intermedios podrán omitirse o proponerse como ejercicios complementarios, al considerarse accesibles o ya trabajados en clase.

PDF Febrero 2022 primera semana — Finalización

PDF Febrero 2022 segunda semana — Finalización

PDF Examen 2022 reserva — Finalización

PDF Febrero 2024 primera semana — Finalización

PDF Febrero 2024 segunda semana — Finalización

PDF Febrero 2025 primera semana

PDF Febrero 2025 reserva

PDF Febrero 2025 segunda semana

Figura 2.9: Exámenes

2.7. Evaluación

Siguiendo los puntos generales tratados en la sección 1.8, se especificará en esta sección la manera particular en que se llevará a cabo la evaluación de la asignatura de *Campos y formas*. Las pruebas de evaluación consistirán en una *Prueba de evaluación continua (PEC)* y una *Prueba Presencial*, que pasan a detallarse a continuación:

- **Prueba de evaluación continua (PEC):** Será el 10 % de la calificación del estudiante o, más específicamente, el estudiante podrá sumar 1 punto a la nota total siempre que obtenga al menos un 4 en la prueba presencial y un 0.5 (sobre 1) en esta misma prueba de evaluación continua (PEC). La PEC será tipo test, y se propondrá hacia el mes de diciembre o fines de noviembre (aproximadamente) en el curso virtual. La realización y la entrega de esta actividad es voluntaria. La fecha y hora, y las modificaciones posteriores si las hubiere, se anunciarán en el foro del curso virtual, y se fundamentarán en una encuesta realizada al estudiantado de la asignatura.

  Las respuestas correctas suman un punto, los errores restan 0,25 puntos y las preguntas en blanco no suman ni restan puntos. Al final, la nota obtenida se ponderará sobre 1, i.e., si en la PEC hay N preguntas, y la nota obtenida es E (sobre N), la nota de la PEC será $e = \frac{E}{N}$ (sobre 1) si $E > 0$, y 0 en caso contrario. No obstante, como se ha comentado, para que la nota de la PEC sea tenida en cuenta en la evaluación final, esta debe ser al menos 0.5 (sobre 1).

- **Prueba presencial:** La prueba presencial es una prueba de 2 horas de duración máxima, en la que no se permite ningún material más allá del estrictamente necesario (bolígrafos y papel). Además, será una prueba con ejercicios de desarrollo. Nótese que, en todos los ejercicios, problemas, y demostraciones, será necesario entender bien lo que se hace. Cada respuesta a un ejercicio de desarrollo deberá estar debidamente justificada; *la ausencia de justificación será motivo suficiente para que la nota relativa a dicho ejercicio sea 0.* Dada la importancia en el área, se podrán poner preguntas cuyo objetivo sea el de comprobar la comprensión asociada a un concepto o procedimiento. Se penalizarán los errores graves, incluidos los de razonamiento o cálculo elementales.

Es importante señalar que, siendo P la nota del *examen presencial*, y e la nota de la *PEC* (ya ponderada sobre 1), en caso de haberla realizado, **la nota de la asignatura se calculará como sigue**:

- Nota Final de la asignatura = P, si P es menor que 4, o bien, e es menor que 0,5 (sobre 1), o bien no se ha realizado la PEC.

- Nota Final de la asignatura = mínimo entre $P + e$ y 10, en cualquier otro caso.

En los casos en que la calificación final sea cercana por menos de medio punto a un aprobado 5, o a un notable 7 o a un sobresaliente 9, la participación activa y significativa en los foros podrá suponer que el estudiante alcance esa nota superior. También se tendrá en cuenta la participación significativa en los foros para asignar las matrículas de honor.

Es también destacable que la nota de la PEC se guardará para la evaluación extraordinaria de septiembre, en caso de que el estudiante tuviera que presentarse. El examen presencial de convocatoria extraordinaria sigue las mismas pautas que el de convocatoria ordinaria.

Fundamentos Metodológicos

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas constituyen procesos intrincados y multifacéticos, en los cuales se pueden identificar cuatro nodos fundamentales: el *docente* (o equipo docente), el *estudiante*, el *saber* y el *contexto* en el que se desarrollan dichos procesos. Cada uno de estos elementos se interrelaciona de manera significativa, influyéndose mutuamente, y tienen una relevancia crucial en el diseño de la *metodología* que se adopte para facilitar estos procesos. Nótese que el término *metodología* se entiende como el "*conjunto de estrategias de enseñanza utilizadas para que los alumnos adquieran una serie de conocimientos y competencias*". La palabra Metodología viene del griego methodos y logos, esto es, *estudio del método.* A su vez, methodos está formada por el vocablo $\mu\varepsilon\tau\alpha$ (meta), que se traduciría como *más allá*, y ὀδός (hodos), *camino o viaje.* Así, método se podría entender como *más allá del viaje*, es decir, no el camino o el destino en sí, sino el plan y el modo de viajar. De este modo, cualquier metodología específica ha de contemplar las cuatro variables mencionadas:

- *Docente (sección 1.7):* Conocimientos y habilidades que debe dominar el docente para llevar a cabo la metodología.
- *Alumnado (sección 1.5):* Perfil específico del alumnado de la UNED.
- *Saber (división titulada "Contenido del texto de la asignatura" del capítulo 2):* Entendido como el contenido que pretenden que el estudiante aprenda.
- *Contexto (capítulo 1, sección 1.6, sección 1.8):* En lo referente al contexto en el que se desarrollan los procesos de aprendizaje y enseñanza en la UNED, cabe destacar lo siguiente:
    - Aprendizaje a distancia.
    - Medios disponibles (Campus Virtual - Ágora y Centros Asociados).
    - Método de evaluación.

Los contenidos de la asignatura que se desarrolla en esta memoria se presentan en la división titulada "Contenido del texto de la asignatura" del capítulo 2 y se encuentran detallados en el material obligatorio de la asignatura [13].

2.8. Procesos de enseñanza y aprendizaje

La educación a distancia se caracteriza en gran parte por la ausencia de una interacción directa entre el equipo docente y el estudiante que facilite la comunicación y la resolución de dudas en tiempo real. Por ello, el *autoaprendizaje* por parte del estudiante constituye un componente central de la educación a distancia. Este autoaprendizaje, orientado y evaluado por los miembros del equipo docente (y del personal profesor-tutor), debe ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades de disciplina, organización y gestión del tiempo para avanzar en su formación sin la supervisión constante de un profesor.

A lo largo del siglo XX, diversas teorías sobre el aprendizaje han considerado posible prescindir de la relación directa entre profesor y estudiante, dando cabida así al aprendizaje autodirigido de ciertos contenidos por parte del estudiante. Esta perspectiva ha abierto la puerta a una variedad de métodos de enseñanza que se centran en la capacidad del individuo para aprender de manera autónoma.

Los diversos métodos de aprendizaje pueden dividirse en dos grupos principales, aquellos basados en la *imitación* y aquellos en los que predomina la *experimentación*. Asimismo, podemos clasificar los métodos de aprendizaje entre métodos *deductivos* o *inductivos*: en los primeros pasamos de casos particulares a un marco general y en los segundos, al contrario. También podemos clasificarlos entre *simbólicos* o *intuitivos* o, dependiendo de la interacción entre el alumnado, como métodos *cooperativos*, donde los alumnos trabajan en grupos desarrollando, a su vez, destrezas interpersonales y habilidades sociales.

Es posible identificar dos corrientes generales que tratan de explicar como se producen los procesos de enseñanza y aprendizaje: la *empirista* o *transmisiva* y el *constructivismo* (véase [26]). Ambas corrientes son, en muchos puntos, contrapuestas:
Varias contribuciones consolidan al *constructivismo* como corriente dominante desde el siglo XX. Asimismo, resulta natural considerar esta corriente cuando tratamos con un aprendizaje a distancia, que inevitablemente pone su foco en la acción del alumno/a para generar su propio aprendizaje (autoaprendizaje).

Dentro de lo heterogéneas que pueden ser las diferentes visiones constructivistas, está asumido:

- El papel *activo* que ha de tener el alumno para conseguir aprender.
- Las mayores posibilidades de acceder a información implican que el docente *ya no es la única fuente posible de conocimiento.*

Han sido (y siguen siendo) muchos los autores que han enunciado teorías de corte constructivista. Las teorías suelen diferir en el *foco principal que permite el aprendizaje y la construcción de conocimiento*. Dada la amplia gama de teorías al

Empirista o transmisiva	**Constructivista**
El alumno aprende lo que el docente explica	El alumno aprende a a través de su acción
El conocimiento se adquiere como trasvase del docente al alumno	El conocimiento se desarrolla a través de la superación de problemas o desequilibrios del alumno
Rol central del docente	Rol central del alumno
Proceso de enseñanza lineal y unidireccional (generalmente basado en la **ostensión**)	Importancia de interacciones profesor-alumno en el proceso de enseñanza
El error se relaciona con el fracaso	El error es visto como precursor del desarrollo del aprendizaje

respecto, presentaremos únicamente las más relevantes para el diseño y programación de la asignatura.

Epistemología genética o **teoría cognitiva del desarrollo:** Jean Piaget (1896-1980) construyó y expuso esta teoría de enfoque constructivista. El fundamento es que la construcción del conocimiento es fundamentalmente **cognitiva** (todo sucede en la mente del estudiante). Atribuye dos atributos principales a la mente humana.

Organización: La mente está estructurada en esquemas cognitivos.

Adaptación: La mente puede adaptarse a estímulos del entorno.

De este modo, existen *dos factores* para conseguir la construcción del conocimiento del alumno:

- **Nivel de desarrollo de los esquemas cognitivos del alumno.** Etapas (de abstracción progresiva). De entre las cuales, nos interesa entender que entre los 11 y los 16 años de edad se da la "*etapa de operaciones formales*", en la que se empieza a desarrollar el razonamiento del tipo hipotético-deductivo basado en la *acción reflexiva.*

- **Estimulación externa e influencia sensorial.**

La idea sobre la cual gira la construcción del conocimiento es la **adaptación**. Ante una situación que deba ser resuelta por el estudiante, este seguirá los siguientes pasos:

1. Tratará de resolverla aplicando sus conocimientos y esquemas cognitivos existentes inicialmente.

2. En caso de no poder, se producirá un **desequilibrio** o **conflicto cognitivo**. Ante esto, deberá reconstruir o expandir sus esquemas y conocimientos previos. Estas son las situaciones que ayudan en la **construcción del conocimiento.**

Estos procesos mentales por los que se desarrolla el aprendizaje son los **procesos de abstracción reflexiva**, que son la clave del desarrollo del conocimiento en la mente humana. La teoría tiene una marcada componente **cognitiva** y de **autorregulación** del desarrollo del conocimiento a través del razonamiento deductivo y la abstracción.

De este modo, el papel del docente es clave a la hora de generar situaciones óptimas de cara a este desarrollo. Así, se buscará diseñar situaciones (típicamente ejercicios o actividades) que permitan al estudiante construir conocimiento y desarrollar habilidades tales como el razonamiento deductivo y la abstracción. Aunque se desarrollará más adelante en detalle, un ejemplo de esto son los *recuadros contenidos en el texto* de la asignatura *Campos y formas* (véase subsección 2.10.2). Estos pretenden que el/la alumno/a reduzca la velocidad de lectura y se pare a reflexionar sobre determinados conceptos o ejercicios, que buscan producir un pequeño desequilibrio cognitivo en la mente del estudiante que dé paso a la autoconstrucción de conocimiento.

Constructivismo sociocultural: Lev Vygotsky (1896 - 1934) formuló esta teoría. Según esta teoría, el desarrollo del conocimiento *no puede entenderse* sino como producto de la *interacción social*; los procesos de internalización, provocados por esta interrelación social, favorecen la apropiación progresiva de la cultura del grupo social, que inducen a la transformación y reconstrucción interna del sujeto y, por ende, el desarrollo de procesos psicológicos superiores como pueden ser la *argumentación* o la *abstracción.*

Vygotsky destaca el papel fundamental del lenguaje como medio por el cual el pensamiento llega a la mente y por el cual se puede transmitir al exterior.

Zona de desarrollo próximo: zona entre el desarrollo real del alumno (aquello que ya sabe) y el desarrollo potencial (aquello que podría llegar a saber).

Vygotsky defendía que **cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje** debe situarse en esta zona. En caso de situarse sobre aquello que ya sabe, o sobre aquello demasiado alejado de sus conocimientos actuales, *no se producirá un avance real en la construcción del conocimiento del alumno.*

De nuevo, los ejercicios y actividades de la asignatura buscarán, progresivamente, situarse en la zona de desarrollo próximo del estudiante. Además, se incentivará por medio de los foros y la realización de ejercicios en grupo la creación de *grupos de trabajo*, que ayuden a los estudiantes a *retroalimentar* sus conocimientos vía la interacción social.

Aprendizaje por descubrimiento: Principalmente creada por Jerome Bruner (1915-2016). Los profesores han de seleccionar y proporcionar situaciones, enigmas o problemas que den la oportunidad al alumno de involucrarse de forma activa en su resolución, con suficiente *curiosidad y motivación.* Se trata de que el alumno se enfrente a prácticas y procesos propios de la investigación para generar aprendizaje.

Durante el trabajo activo del estudiante en este tipo de situaciones, se producen (o deberían producirse) los siguientes procesos:

- **Observación**
- **Experimentación**
- **Comparación**
- **Discriminación**
- **Formulación de hipótesis**

De esta manera, aunque de nuevo se desarrollará en detalle más adelante, con objeto de fomentar dicha curiosidad, en el texto de la asignatura se plantean algunos "*enigmas*" y se presentan "*cuadros de diálogo*", que no son ejercicios en sí mismos, sino que buscan que el lector siga un proceso de pensamiento típico de la investigación matemática (sin pretender que el mismo lector sea capaz de resolver las preguntas en ellos planteadas).

Aprendizaje significativo: David Ausubel (1918-2008) desarrolló esta teoría. Para que se pueda considerar que un alumno o alumna ha desarrollado un *aprendizaje significativo*, ha de llegar a conseguir que la nueva información quede **integrada en sus conocimientos y su cultura propios**. Esto favorecerá la memoria a largo plazo.

El aprendizaje será más significativo cuanto mayor sea la *generación de relaciones entre los conocimientos previos y los nuevos.* Algunas condiciones típicas para facilitar el aprendizaje significativo:

- Detección y conocimiento por el docente de los conocimientos previos del alumno.
- La necesidad de que el alumno quiera y tenga disposición para realizar estas asociaciones.
- El planteamiento del docente de nuevos contenidos maximizando su potencial para resultar *significativos* para los alumnos.

Nótese que, tal y como se explicó en sección 2.5, uno de los puntos fuertes de la asignatura de *Campos y formas* es su interrelación con el resto de las asignaturas de grado de matemáticas. En cierto sentido, supone un campo de aplicación natural de los conocimientos obtenidos en las asignaturas de Cálculo, Álgebra lineal, Geometría y Topología. Es decir, en esta asignatura, el estudiante tiene la oportunidad de ver cómo se aplica lo aprendido en gran parte de las asignaturas cursadas en los dos cursos anteriores. Así, con el objetivo de promover un aprendizaje más significativo, se tomarán las siguientes medidas:

- Se buscará que el estudiante comprenda y trabaje las *conexiones* de esta asignatura con las materias mencionadas.
- Se maximizará la *similitud de la notación* de la asignatura con respecto al resto de asignaturas conectadas. En caso de no ser posible, se explicarán las diversas maneras en las que se denota un objeto en las diferentes asignaturas.
- Se presentarán *aplicaciones* de la teoría desarrollada tanto dentro de las asignaturas del grado de Matemáticas como fuera de las Matemáticas.

Para más detalle, véase sección 2.10. A pesar de la utilidad de estas teorías, la *generalidad* en la que se desarrollan y su *independencia* del contenido real de la asignatura pueden provocar que su aplicación resulte *poco satisfactoria*. Esto motivó que, a mediados del siglo XX, surgiera la disciplina de la *didáctica de la matemática*, con el objetivo de indagar de una manera metódica y sistemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en los planes de preparar profesionalmente a los educadores matemáticos.

2.9. Teorías propias de la didáctica de la matemática

En los últimos 40 años se ha venido desarrollando, por parte de un importante grupo de investigadores franceses, un marco teórico para explicar los *procesos de enseñanza y aprendizaje* de las matemáticas en las aulas. Este grupo concibe la enseñanza como un sistema de tres subsistemas: el *saber a enseñar*, el *docente* y el *estudiante*. Conviene señalar que, de manera análoga a la sección anterior, el objetivo de este apartado es exponer los fundamentos teóricos que han incidido y han sido seleccionados para el diseño de la asignatura. En consecuencia, el énfasis no se situará aún en su concreción sobre la asignatura (que se abordará en secciones posteriores), sino en el desarrollo y clarificación de dichos fundamentos.

Teoría de situaciones didácticas (Guy Brousseau)

El conocimiento se construye a través de las *situaciones fundamentales*. Las situaciones fundamentales generalmente parten de actividades que resulten un *verdadero problema* (conocimientos previos insuficientes) y en las cuales el *conocimiento matemático que se busque desarrollar aparezca como solución óptima.*

De nuevo, el motivo por el que estas teorías son interesantes en metodologías a distancia es que este conocimiento ha de poder ser construido por los alumnos.

1º **Situaciones de acción:** Cada alumno o alumna trabajará de manera *individual* el problema a partir de conocimientos previos. El estudiante ha de ser capaz de entrever la primera respuesta aunque, idealmente, sea insuficiente.

2º **Situaciones de formulación:** Se forman *grupos pequeños* en los que cada estudiante *comunica a los demás* (y al docente) *los avances* en la resolución del problema.

3º **Situaciones de validación:** Los estudiantes han de *argumentar la validez* de sus estrategias creando un ambiente de discusión con el resto de la clase.

4º **Situaciones de institucionalización:** El docente *interviene para acabar* y darle a los conocimientos adquiridos el estatus de conocimiento matemático.

Aunque la teoría de situaciones didácticas está originalmente pensada para "*aulas*", en el sentido usual de la palabra, más adelante detallaremos cómo podemos utilizar los recursos de la UNED (en particular, los foros) para aplicar esta formulación de *situaciones fundamentales* en el contexto de esta universidad y, en particular, en la asignatura de Campos y formas.

El error en la didáctica de las matemáticas

Atendiendo a nuestra historia, el error es algo inherente al avance del conocimiento científico. En un enfoque más *transmisivo* de la enseñanza de las matemáticas el error está muy relacionado con el fracaso, o bien por parte del profesor al transmitir el conocimiento, o bien por parte del alumno al registrarlo. Por otro lado, en el enfoque *constructivista*, el error se suele asociar a la aplicación de un conocimiento a un contexto inadecuado. Citando a G. Brousseau [3]:

"*El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en teorías empiristas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles; su origen se constituye en un obstáculo.*"

El error debe ser visto como algo *natural* en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Numerosos investigadores coinciden en destacar las siguientes características comunes a los errores:

- Surgen de manera *sorprendente*, manteniéndose ocultos al profesor durante un tiempo.
- Son *persistentes*, al reflejar el conocimiento del alumno.

- Son *sistemáticos*, reflejan la presencia de un conocimiento insuficiente de una determinada noción, aunque también se pueden deber al azar.
- La *veracidad* de una respuesta errónea no suele ser cuestionada por el estudiante.

Así, *resulta de utilidad detectar, caracterizar e interpretar errores habituales.* Las formas de caracterizar la naturaleza de los errores son *muchas y muy variadas.* En particular, en [3], G. Brousseau distingue entre tres tipos de **obstáculos** que pueden dar lugar a errores en matemáticas:

- **Obstáculos epistemológicos (saber):** Un conocimiento matemático que es válido en un determinado dominio se aplica a un dominio diferente.
- **Ontogenéticos (alumno):** Cuando el error se debe a limitaciones y a las características propias del desarrollo cognitivo del estudiante.
- **Didáctico (docente):** Cuando el error viene provocado por las elecciones del docente al plantear la enseñanza de determinado concepto matemático.

Es *importante* notar que la correcta interpretación de un error es crucial a la hora de usar el mismo como plataforma para la construcción del conocimiento. Resulta *ingenuo* pensar que los estudiantes no se enfrentarán a este tipo de obstáculos. De hecho, es beneficioso que **los estudiantes se enfrenten a ellos, para superarlos y tomar así conciencia de sus limitaciones**.

La detección de las causas que provocan los errores debe resultar de utilidad para tratar de plantear situaciones hipotéticas que ayuden a los estudiantes a reorganizar y avanzar en sus conocimientos.

Por otro lado, en el aula virtual pueden darse muchas situaciones, condiciones o circunstancias que faciliten o que dificulten el desarrollo del aprendizaje de un/a alumno/a. Por esto, desde esta perspectiva, no se habla directamente de aprendizaje, sino de **oportunidad de aprendizaje** ([19]). Así, *una oportunidad de aprendizaje es toda situación, durante el proceso de resolución de un problema, en la que el alumno pueda tener la posibilidad de obtener conocimiento.* Dichas oportunidades de aprendizaje suelen aparecer en clase con el surgimiento de errores, las preguntas en un problema o ejercicio determinado o la expresión de interés sobre un tema en particular.

Un docente debería gestionar la clase de manera que se priorice la aparición de *oportunidades de aprendizaje.* La generación y explotación de estas oportunidades está muy ligada a la interacción profesor-alumno en el aula. Este enfoque didáctico del *tratamiento del error* y, más generalmente, de generación y aprovechamiento de *oportunidades de aprendizaje* se aplicará, sobre todo, en el foro de la asignatura donde los estudiantes suelen mostrar sus dudas y sus errores en la resolución de ejercicios. No obstante, tendrá repercusión directa en el resto de variables que componen la asignatura (desarrollo del material didáctico, planteamiento de tareas, retroalimentación de las pruebas parciales o finales, ...). Más adelante, se tratará más en profundidad el concepto de *oportunidad de aprendizaje*.

Tarea: Planteamiento y resolución de problemas

La *tarea* es, usualmente, considerada como un componente clave en cualquier metodología didáctica (especialmente en la conocida como "*Aprendizaje basado en proyectos y problemas*"), dado que genera (o debería generar) *oportunidades de aprendizaje*. Llamaremos *tarea* a toda aquella propuesta que un docente formula a sus alumnos y alumnas con intención de fomentar el aprendizaje en matemáticas. Por lo general, este tipo de actividades se reproducirá en la UNED por medio del material didáctico, pequeños retos propuestos en los foros, la mencionada Prueba de Evaluación Continua y el examen final de la asignatura. **Smith** y **Stein** [24] definen cuatro tipos de tareas según su *demanda cognitiva*:

Nivel 1: Tareas de memorización: Involucran reproducción directa de definiciones, fórmulas o reglas previamente trabajadas.

Nivel 2: Tareas de procedimiento sin conexiones: Se reclama el uso de un algoritmo de manera muy evidente.

Nivel 3: Tareas de procedimiento con conexiones: Centradas en el significado de un concepto o procedimiento, buscando desarrollar la comprensión.

Nivel 4: Tareas que requieren "*hacer matemáticas*": Tareas que requieren un pensamiento complejo y no algorítmico.

Se consideran dos grandes niveles, correspondiendo los niveles 1 y 2 a una *demanda cognitiva baja*, y 3 y 4 a una *demanda cognitiva alta*.

La demanda cognitiva es un constructo que un docente *debe tener presente en los procesos de diseño y selección de las tareas.* Dependiendo de los objetivos a alcanzar, la proporción de tarea de los diferentes niveles puede variar. En caso de que se quiera que los estudiantes desarrollen agilidad en la aplicación del procedimiento, será adecuado proponer tareas de 2. Aun así, será necesario proponer tareas de niveles superiores para que los alumnos y alumnas tengan la oportunidad de desarrollar la comprensión de los conceptos y habilidades y competencias propias de la asignatura (como la capacidad de abstracción o el razonamiento matemático avanzado).

Los ejercicios y actividades del texto base de la asignatura se desarrollan siguiendo este esquema, de tal manera que se procura que contenga algunos pocos ejercicios de nivel 1 y 4, mientras que la mayoría se centren en los niveles 2 y 3. Por otro lado, se propondrán varias tareas (no evaluables) de nivel cognitivo 4 en el campus virtual de la asignatura, que pretenden servir como fuente de motivación para el alumnado. En subsección 2.10.6 se darán ejemplos explícitos de ejercicios de cada uno de estos niveles que contendrá el material de la asignatura.

Ahondando un poco más en lo relativo a los *problemas*, existen tres enfoques principales de la enseñanza de las matemáticas: *enseñanza para la resolución de problemas*, *enseñanza sobre la resolución de problemas* y *enseñanza a través de la resolución de problemas*. Es muy usual enseñar *para* y *a través* de la resolución de problemas. Sin embargo, el planteamiento, formulación e invención de problemas puede no ser una tarea únicamente para el docente. De hecho, la invención de problemas por parte de los estudiantes es de *gran interés formativo*.

Por un lado, *prepara al alumno para hacer frente al uso de los conocimientos matemáticos fuera del contexto universitario* (la mayoría de los problemas son creados por quien pretende resolverlos). Por otro lado, **permite que los estudiantes se aproximen a las tareas propias de la disciplina de matemáticas:** explorar, conjeturar, formular problemas...

Se ha demostrado que incluir este tipo de tareas en la enseñanza tiene efectos beneficiosos, como el *fomento de la creatividad* y de la *comprensión lectora*, junto con una mejora en *aspectos afectivos y emocionales*, como el aumento de la motivación y la reducción de la ansiedad ante la resolución de problemas.

Según **Silver** [23], podemos construir tres tipos de tareas de planteamiento de problemas:

- **Anteriores a la resolución de un problema:** El alumno o alumna *inventa* el enunciado antes de resolver el problema. El profesor puede diseñar una actividad en la plataforma de Ágora donde fija cierto material (gráficos, dibujos,...) y solicita un enunciado.
- **Durante la resolución del problema:** Durante el proceso de resolución de un problema, típicamente durante una sesión extraordinaria de videoconferencia, se cambian las variables o se reformula el problema con otras palabras o se simplifica para intuir la solución del original.
- **Al finalizar la resolución del problema:** Surgen al acabar un problema para generalizar o extrapolar los resultados a diferentes contextos. Otro ejemplo sería que, al resolver una duda sobre la resolución de un problema en el foro, se le pregunte al estudiante qué ocurriría si se añadiesen otras restricciones o si se variaran las condiciones.

Así, en el campus virtual de la asignatura se dará al estudiante la ocasión de generar sus propios enunciados, aportando, por ejemplo, la resolución de un problema (se desarrollará en mayor detalle en las secciones posteriores). Otra manera de lidiar con este tipo de actividades es dar la oportunidad a los/as alumnos/as de "*transformar*" un enunciado dado por el equipo docente y resolverlo a posteriori.

Diversidad en la UNED

Se ha resaltado que las características de los estudiantes que eligen la educación a distancia suelen ser muy diversas: *laborales*, *familiares*, *geográficos* o *económicos* ... Esto hace que el perfil del alumnado sea heterogéneo en muchos sentidos: en edad, en conocimientos y en dedicación, siendo este último perfil (estudiantes que trabajan o tienen responsabilidades familiares) el que es, generalmente, mayoritario en la UNED. De hecho, en torno al 65 % del alumnado trabaja al mismo tiempo que estudia. Además, es resaltable que en la UNED más de la mitad del alumnado es mayor de 30 años. Así, dada la singularidad que distingue a la UNED frente a las universidades presenciales *convencionales*, la búsqueda de métodos para abordar dicha diversidad constituye un desafío significativo para el cuerpo docente de la UNED. Además de la heterogeneidad mencionada, en el aula se presentan alumnos y alumnas con diferentes niveles de conocimientos, capacidades, actitudes y motivación, y con diversos contextos sociales, culturales y económicos. No obstante, la mencionada variedad puede generar *oportunidades de aprendizaje* en el aula.

Para lidiar con esta diversidad, empezaremos estudiando y aplicando las diferentes medidas que pueden ayudar a fomentar el aprendizaje de todos los colectivos dadas por **Herzig** [12]:

1. **Respetar los ritmos de aprendizaje de cada estudiante.**
2. **Ser consciente del entorno individual de cada estudiante y usarlo para crear oportunidades de aprendizaje.** Civil, Planas y Fonseca [6] muestran un ejemplo en el que un profesor descubre que la mayoría de las familias de la clase estaban vinculadas a los sectores de la construcción. Esto lo llevó a desarrollar el proyecto "*construye la casa de tus sueños*"; lo que supuso un cambio significativo en la implicación del alumnado. En la UNED, dada la distancia con los estudiantes, es más complicado generar este tipo de conocimiento. No obstante, es positivo tener esta clase de estrategias a mano por si fuera de aplicación en el futuro.
3. **Implementar tareas ricas, abiertas y flexibles que fomenten la aparición de distintas respuestas y estrategias.** "*Escribe una historia sobre lo que sabes del concepto 'variables´, ¿qué es eso otra vez? Considera las siguientes preguntas: ¿Qué sabes del concepto variable? ¿Cómo llegué a él? ¿Es posible generalizar lo que ya conozco?*". La información de las respuestas te puede permitir elaborar un mejor discurso sobre el concepto de variedad y carta local.
4. **Mantener altas las expectativas de todos los estudiantes y valorar las distintas estrategias seguidas por los estudiantes.** Una estrategia no estándar presentada por un estudiante podría dar lugar a la reflexión y discusión en el foro de la asignatura sobre las posibles estrategias para resolver un ejercicio.
5. **Ser cuidadoso con la gestión de preguntas y técnicas de escucha en clase.** Hay que intentar aprovechar todas las intervenciones para crear oportunidades de aprendizaje. Por supuesto, aunque se ha transcrito la medida de Herzig tal y como

la expone, en la UNED este punto se trasladará principalmente a la gestión de las preguntas en los foros de la asignatura, así como, en su justa medida, a la interacción con el estudiante por otros medios (mail, tutorías ...).

6. **Identificar prejuicios propios, para luego olvidarlos.** Todos los estudiantes son capaces de desarrollar habilidades de alto nivel.
7. **Emplear distintas metodologías para acomodarse a las fortalezas y necesidades de los estudiantes.** Se buscará fomentar el trabajo con foros colaborativos, lo que puede ser útil para complementar a los alumnos y alumnas.
8. **Romper estereotipos dominantes en matemáticas.** Los estereotipos desincentivan la participación, ya que alejan a grupos que se ven (o no desean verse) representados por dicho estereotipo.
9. **Planificar la evaluación.** Con el objetivo de que las respuestas de los estudiantes reflejen de la manera más fiel y precisa posible su nivel de conocimiento.

Objetivos de aprendizaje y criterio de logros

Muchos expertos constatan los beneficios de que el profesor explicite, al comienzo, cuáles son los *objetivos de aprendizaje* y presente (o negocie) cuáles son los *criterios de logro*. Sería fructífero, además, añadir un minidebate con los alumnos sobre el grado de alcance de estos objetivos.

- **Objetivos de aprendizaje:** Intenciones de aprendizaje de esa sesión o tema. Deben ayudar al estudiante a distinguir entre *lo que tienen que aprender*, *lo que tienen que hacer para conseguirlo* y *las tareas que harán para ello*. Cuando establecemos metas de aprendizaje, estamos respondiendo a la pregunta *¿Hacia dónde voy?*
- **Criterios de logro:** Estos deben ser más *concretos* para permitir al estudiante entender lo que tiene que hacer para progresar en el aprendizaje. Los criterios de logro responden a la pregunta: *¿Cómo voy?*

El propósito de los "*objetivos de aprendizaje y criterios de logros*" es que los estudiantes sean capaces de participar y regular su propio aprendizaje.

Más adelante se especificarán tanto los objetivos de aprendizaje como los criterios de logro propuestos para la asignatura de "*Campos y formas*".

Feedback

Es común en una asignatura de matemáticas en la UNED que el estudiante presente, a través del foro correspondiente, un ejercicio junto con su solución, con la expectativa de recibir retroalimentación o "*feedback*" por parte del equipo docente sobre el trabajo realizado. Un *feedback*, con propósito formativo, fomenta la reflexión y guía la mejora del aprendizaje.

Se ha demostrado que, para que un feedback produzca efectos positivos, es mejor que solo se incluyan comentarios, *no calificaciones.* Además, según C. Lee [15], *los comentarios deberían estar centrados en el aprendizaje que se debió realizar y no en el estudiante.* La estructura recomendada para este tipo de comentarios es la siguiente:

1) Un primer párrafo exponiendo lo solicitado.

2) Un comentario describiendo la producción del alumno y que se indique dónde se encuentra respecto a los objetivos.

3) Una tercera parte indicando los posibles caminos para mejorar (sin incluir la solución).

Por otro lado, el equipo docente puede aprovechar las preguntas del foro para, a su vez, plantear sus propias preguntas. Esta es una práctica muy habitual y, bien manejada, puede convertirse en una herramienta muy poderosa para fomentar el aprendizaje. J. Giménez [11] señala que las preguntas deben cumplir los siguientes objetivos:

- **Fomentar la curiosidad del alumno y ejercer investigación:** ¿Cuál fue tu predicción? ¿Puedes decir qué pasará? ¿Por qué crees que a otros les interesa. . . ?

- **Promover significatividad:** ¿Por qué consideras que puede ser interesante? ¿Qué sabes de. . . ? ¿Puedes aplicar esto en otra área de Matemáticas?

- **Promover hipótesis y analizar resultados:** ¿Qué ocurre si cambiamos. . . ? ¿Qué otras posibilidades. . . ? ¿Cómo sabes si es correcto?

- **Mejorar la comunicación y fomentar la participación:** ¿Qué nociones han sido importantes para . . . ? ¿Qué conceptos se han utilizado para. . . ?

- **Fomentar la reflexión constante:** ¿Qué pensaste cuando . . . ? ¿Cuál de los razonamientos ha sido importante para. . . ?

Se seguirán estas recomendaciones tanto en la gestión del foro de la asignatura, como en relación con la calificación de los exámenes (véase subsección 2.10.5) para más detalle).

2.10. Innovaciones implementadas

Como se ha comentado en reiteradas ocasiones, la presente asignatura incorpora una serie de innovaciones orientadas a mejorar, entre otras, la coherencia global con respecto al grado de Matemáticas, los procesos de aprendizaje y la experiencia formativa del estudiantado en el contexto específico de la UNED. Estas modificaciones no responden a cambios aislados, sino a una revisión profunda del diseño de la asignatura. En lo que sigue se describen las principales actuaciones implementadas, comenzando por aquellas que afectan al *texto base* [13] de la asignatura y a su estructura interna, para posteriormente abordar aspectos metodológicos, tutoriales y de retroalimentación.

2.10.1. Estructura del texto

La asignatura se enfoca como una evolución natural y necesaria del cálculo diferencial e integral en una o varias variables a variedades diferenciables. Así, en base a lo comentado, lo primero que se va a trabajar en la asignatura es la noción de *variedad (diferenciable)*, i.e., el espacio de variables que sustituye y generaliza a $\mathbb{R}$ (en el caso de análisis de una variable) y a $\mathbb{R}^n$ (en el caso de análisis de varias variables).

En el primer bloque o tema (*Tema 1.- Fundamentos*), se introduce el concepto de variedad diferenciable, que es el escenario natural para extender las ideas del cálculo clásico a dimensiones superiores. Partiendo de preliminares topológicos, se construye la noción de variedad y se exploran sus propiedades fundamentales, proporcionando una base sólida necesaria para los capítulos posteriores.

En el segundo bloque, el *cálculo diferencial* (*Tema 2.- Cálculo diferencial*) se despliega en toda su generalidad. Aquí, se aborda la diferenciabilidad de aplicaciones entre variedades y se introducen los conceptos esenciales de fibrados tangente y cotangente, herramientas indispensables para la descripción y estudio de los campos vectoriales y formas diferenciales, elementos cruciales en la formulación moderna del cálculo sobre variedades. La teoría desarrollada en este bloque de la asignatura sienta las bases para entender el comportamiento de estos objetos bajo transformaciones diferenciables y su interacción con la estructura geométrica de las variedades.

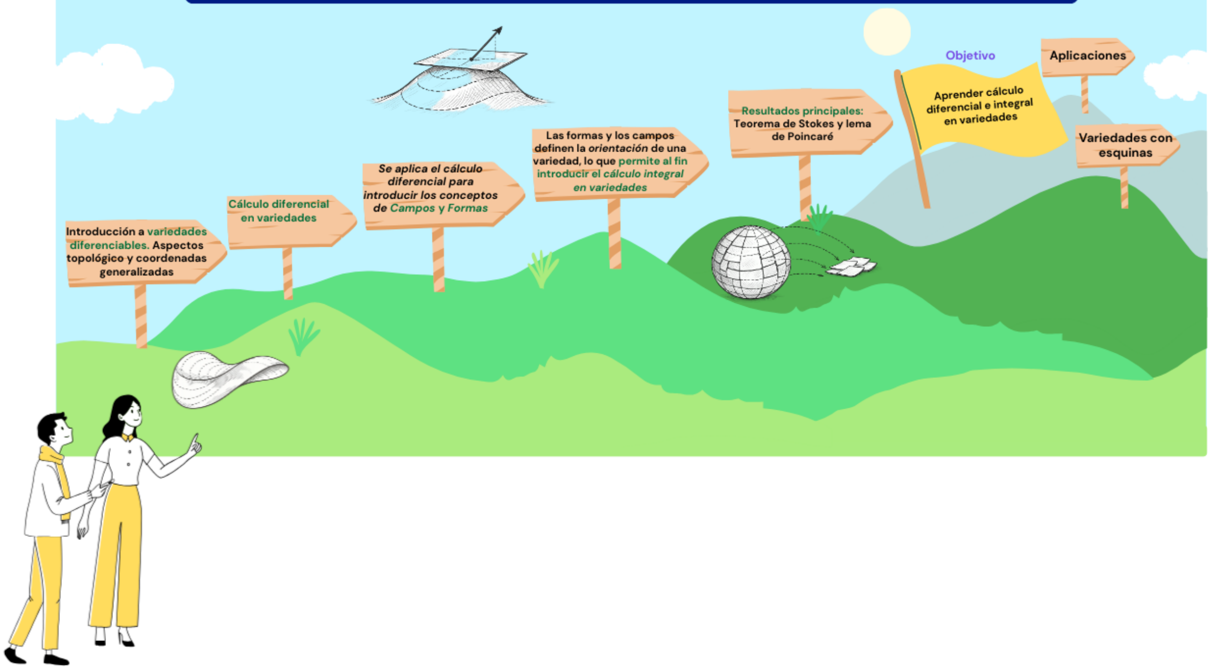
El tercer tema o bloque versa sobre *cálculo integral sobre variedades* (*Tema 3.- Cálculo integral*), quizás una de las áreas más ricas y profundas de las matemáticas modernas. Aquí, se discuten las integrales de línea y de superficie, y se presentan, entre otros, el *teorema de Stokes* y el *lema de Poincaré*, que no solo unifican diversos resultados del análisis vectorial clásico, sino que también proporcionan poderosas herramientas para la caracterización de formas diferenciales conservativas. Así, es en este bloque donde se empieza a observar la relación entre las variedades y las curvas y superficies, buscando que el estudiante empiece a comprender el poder del pensamiento abstracto que se ha desarrollado.

El primer apéndice (*Apéndice 1.- Aplicaciones*) explora una serie de aplicaciones fundamentales de los resultados desarrollados previamente. Entre ellas, se incluyen el *teorema de Stokes aplicado a integrales de superficie*, *el teorema de Green* y el *teorema de la divergencia*, todos ellos ejemplos de cómo el cálculo sobre variedades puede iluminar problemas clásicos de las matemáticas sobre curvas y superficies. Se pretende así que el estudiante comprenda la potencia de los resultados desarrollados en el contexto de variedades diferenciables. Además, se abordan teoremas que conectan la topología y el álgebra con el análisis de variedades, como el teorema del punto fijo de Brouwer, el teorema de la bola peluda y el teorema fundamental del álgebra. Este contenido **no forma parte del contenido evaluable de la asignatura**; se encuentra en el texto base únicamente para motivar y hacer significativo el aprendizaje del estudiante, reforzando las conexiones con otras asignaturas y respondiendo a la típica pregunta en matemáticas de *¿para qué sirve esto?*

Por último, el segundo apéndice (*Apéndice 2.- Variedades con esquinas*) aborda una generalización natural del tipo de variedades consideradas en la asignatura: las *variedades con esquinas*. Este tipo de estructuras no se incluye en el contenido evaluable de la materia, ya que su tratamiento no añade nada más que carga técnica y tediosa en la asignatura. No obstante, para el estudiantado que desee profundizar más allá del temario básico, las variedades con esquinas constituyen un marco natural de extensión del contenido de la asignatura, pues permiten aplicar las herramientas del cálculo diferencial e integral a dominios con irregularidades geométricas como, por ejemplo, los polígonos regulares.

Así, la asignatura se divide en **tres bloques o temas** que van desde la misma definición de variedad diferenciable hasta la demostración de teoremas clásicos, pasando por el desarrollo del cálculo diferencial e integral en variedades. Además, se añaden **dos bloques más**, que pretenden servir únicamente como herramienta opcional para el lector/estudiante. En el texto de la asignatura *texto básico* [13], se presenta esta estructura de la asignatura de manera clara y sin ambigüedades. Además, contiene numerosos ejercicios (más de la mitad de ellos resueltos) que buscan reforzar la comprensión teórica y ofrecer oportunidades para explorar aplicaciones prácticas y conectar los resultados con otros campos de las matemáticas. Por último, dicho texto busca maximizar las conexiones con las asignaturas directamente relacionadas con *Campos y formas*. Así, en los cuatro primeros bloques se busca que el/la alumno/a sea capaz de extender el cálculo diferencial, aprendido en las asignaturas de «*Funciones de una variable I*» (61021022), «*Funciones de una variable II*» (61021074), «*Funciones de varias variables I*» (61021080) y «*Funciones de varias variables II*» (61022027), a variedades diferenciables; la expresión en coordenadas locales de las estructuras que rodean la noción de variedad diferenciable servirá, generalmente, como nexo con estas asignaturas. Además de las susodichas asignaturas, cabe destacar que en el primer bloque se tratan términos topológicos que se estudian en «*Topología*» (61023015) y, a partir del tercer bloque, se introducen al estudiante en nociones como las de camino y superficie, que se trabajarán posteriormente en profundidad en «*Geometría diferencial de curvas y superficies*» (61023067), con la misma notación que en dicha asignatura. Se hace también lo propio con la asignatura «*Geometría diferencial*» (61024049). Cabe señalar también que se destaca la conexión de esta asignatura con la de «*Geometrías lineales*» (61022010), probando que los subespacios afines de $\mathbb{R}^n$ y los espacios proyectivos (estructuras nucleares de dicha materia) son ejemplos de variedades diferenciables. De esta forma, el texto busca mejorar la **coherencia global de la nomenclatura** y notación utilizada en el curso, estimulando con ello, entre otras cosas, el *aprendizaje significativo (D. Ausubel)* del estudiante mencionado en sección 2.8.

Camino de aprendizaje



2.10.2. Desequilibrio cognitivo

En la sección 2.8 *epistemología genética (J. Piaget)*, se destaca el papel del docente a la hora de generar situaciones óptimas de cara al desarrollo de los procesos de abstracción reflexiva. En particular, se tratará de enfrentar al estudiante a situaciones en las que se pueda producir cierto desequilibrio cognitivo, y que permitan la *adaptación* del estudiante, i.e., escenarios en los que el estudiante trate de aplicar sus conocimientos y esquemas cognitivos existentes inicialmente. Siendo estos insuficientes, deberá reconstruir o expandir sus esquemas y conocimientos previos. Veamos tres ejemplos específicos. El primero de estos ejemplos toma formas en la siguiente clase de recuadros:

> *A lo largo del texto básico [13] el lector se encontrará con preguntas enmarcadas en un recuadro como este cuyo objetivo no es, necesariamente, que el lector alcance la respuesta; más bien sirven para que el/la alumno/a se enfrente a una pregunta cuya respuesta está generalmente algo más allá de sus conocimientos hasta ese punto pero que, sin embargo, puede empezar a entrever.*

La filosofía de este enfoque, se centra en fomentar el pensamiento crítico y la comprensión profunda a través de preguntas desafiantes que invitan al lector a generar su propio conocimiento. Estas preguntas no están destinadas a ser respondidas de manera directa o inequívoca, sino a incentivar la reflexión e indagación. Este enfoque tiene varias implicaciones y beneficios:

- **Generación de conocimiento propio:** El lector es desafiado a encontrar respuestas basadas en sus propios razonamientos, aplicando el conocimiento existente. Este proceso les permite internalizar conceptos y técnicas de una forma más significativa.
- **Desequilibrio cognitivo:** Al enfrentarse a preguntas que no pueden responder de inmediato, los lectores experimentan un «*desequilibrio cognitivo*». Esta sensación de incomodidad cognitiva impulsa a los estudiantes a cuestionar su comprensión actual, lo que los lleva a investigar más a fondo, refinar su pensamiento y aprender de una manera que va más allá de la memorización (*Epistemología genética, J. Piaget*).
- **Aprendizaje significativo:** Incluso aunque el lector no encuentre la respuesta, habrá pasado por un proceso activo de indagación, análisis y reflexión que consolida el aprendizaje. En lugar de recibir el conocimiento de forma pasiva, lo construyen de forma activa, lo que mejora la retención y la aplicación práctica de los conceptos (*Aprendizaje significativo, D. Ausubel*).
- **Gusto por la investigación:** Se pretende que la búsqueda de respuestas a este tipo de preguntas dé la oportunidad al lector de involucrarse de forma activa

en el desarrollo del texto, y se incentive así el gusto por investigar y «*hacer matemáticas*» por sí mismo (*Aprendizaje por descubrimiento (J. Bruner)*).

Veremos ejemplos concretos de estos recuadros cuando se desarrolle el contenido de la asignatura.

Otra manera de incentivar la reflexión y provocar procesos propios de adaptación cognitiva vendrá dada por otro tipo de recuadros:

Ese tipo de recuadros,generalmente más grandes, se encontrarán también por el texto base [13]. Estos recuadros no contienen información necesaria para la comprensión del texto; el único propósito de estos es el de servir como una suerte de *diálogo* con el lector, en el que se le invita a razonar y a descubrir por sí mismo, la esencia, intuición o razón de ser de ciertos conceptos o resultados.

De esta manera, en resumen, se obtiene una lectura de velocidad no constante, dedicando algo más de tiempo en ciertos puntos a superar ciertos desequilibrios cognitivos que se producen al reflexionar sobre lo que en estos recuadros se propone. Así, se pretende provocar con este tipo de estimulación un beneficio similar al asociado a los recuadros anteriores. De nuevo, más adelante expondremos recuadros específicos.

El tercer ejemplo viene dado por el diseño de los ejercicios.

Diseño de los ejercicios: Algunos de los ejercicios del texto base están pensados para que resulten un verdadero reto para el estudiante.

Notemos que el fundamento metodológico de estos tres tipos de materiales docentes no está únicamente basado en la llamada epistemología genética, sino que se han tenido también en cuenta, entre otros, el *Aprendizaje por descubrimiento* (J. Bruner) *Aprendizaje significativo* (D. Ausubel) la *zona de desarrollo próximo* o los niveles de tareas según demanda cognitiva de Smith y Stein (sección 2.8).

2.10.3. Tutorías virtuales

Como se ha comentado, *la asignatura tiene asociado un/a profesor/a-tutor/a intercampus*. A lo largo del curso, se propondrá a dicho profesor-tutor la realización de una *tutoría virtual* de entre una hora y una hora y media, utilizando la herramienta de *Teams*, por cada uno de los cinco bloques. Cada una de estas tutorías tendrá la siguiente estructura:

1º Se impartirá una primera parte **magistral** en la que se exponga, de manera reducida, aquellos conceptos que se van a trabajar.

2º Se propondrá una **actividad** específica, para la que se dedicará el resto de la clase.

Entre las actividades que propondrán podremos encontrar los siguientes formatos:

- **Individual:** Se propondrán actividades a resolver individualmente, con una demanda cognitiva alta (Nivel 4 siguiendo los cuatro niveles de Smith y Stein sección 2.9). Se dará un enfoque constructivista a estas sesiones y se espera que resulten en actividades que permitan a los estudiantes interactuar con el docente, y crear discusiones constructivas a lo largo de la sesión.

- **Grupal:** Se aplicará activamente la *teoría de situaciones didácticas (Guy Brousseau)* sección 2.9. Específicamente, se propondrán actividades o ejercicios que presenten una primera *situación de acción*, donde cada alumno o alumna trabajará de manera individual el problema. Esta irá seguida de otra *situación de formulación*, en la que se forman grupos pequeños utilizando *Teams* donde cada estudiante comunica a los demás (y al docente) los avances en la resolución del problema. Después seguirá una *situación de validación*, en la que los estudiantes han de argumentar la validez de sus estrategias creando un ambiente de discusión con el resto de la clase. Finalmente, se buscará una *situación de institucionalización*, i.e., el docente interviene para acabar y darle a los conocimientos adquiridos el estatus de conocimiento matemático.

Con este tipo de actividades se buscará incentivar un aprendizaje basado en la teoría de constructivismo sociocultural tratada en sección 2.8, potenciando la interacción entre los estudiantes para que incida positivamente en su aprendizaje.

2.10.4. Objetivos de aprendizaje y Criterios de logros

En la sección 2.7 se mencionó la importancia de detallar los *objetivos de aprendizaje* y *criterios de logro* de la asignatura.

Los objetivos de aprendizaje se especificarán en la pestaña de “*plan de trabajo*” de la *Guía Unificada* de la asignatura y se detallarán sobre el texto básico de la asignatura. Además, se aportará una recomendación de horas de estudio de cada una de las secciones, con la siguiente notación: T= Horas dedicadas a estudiar conceptos teóricos, P= Horas dedicadas a practicar sobre ejemplos específicos.

Objetivos de aprendizaje:

1 *Variedades diferenciables*

1.2 **Estructura de variedad** (25 horas; T-20h, P-5h).

a) Variedad topológica y diferenciable.
b) Carta local, coordenadas, atlas y estructura diferenciable.
c) Puntos interior y frontera. Estructura de estos conjuntos.

1.3 **Algunas propiedades topológicas** (10 horas; T-10h).

a) Conexo y conexo por caminos.
b) Paracompacidad.

1.4 **Ejemplo de variedades diferenciables** (10 horas; P-10h).
Ejemplos del texto.

2 *Cálculo diferencial*

2.1 **Aplicaciones diferenciables** (10 horas; T-5h, P-5h).

a) Aplicación diferenciable y difeomorfismo.
b) Versión local de una aplicación diferenciable.

2.2 **Fibrados tangente y cotangente** (10 horas; T-7h, P-3h).

a) Derivación en un punto.
b) Derivada y derivada direccional de un camino.
c) Derivadas parciales.
d) Espacio tangente en un punto.
e) Expresión local y coordenadas de un vector tangente en un punto.
f) Fibrado tangente. Propiedades.
g) Espacio cotangente.
h) Expresión local y coordenadas de un vector cotangente en un punto.
i) Fibrado cotangente. Propiedades.

2.3 **Aplicación inducida** (8 horas; T-5h, P-3h).

a) Aplicación inducida o diferencial. Propiedades.
b) Versión local de la aplicación inducida.
c) Derivada exterior de una función.

2.4 **Campos de vectores** (12 horas; T-7h, P-5h).

a) Sección.
b) Campo de vectores.
c) Versión local y coordenadas de un campo de vectores.
d) Definiciones alternativas del concepto de campo de vectores.
e) Campo de vectores a lo largo de un subconjunto.
f) Pushforward.

2.5 **Formas diferenciales** (15 horas; T-10h, P-5h).

a) Tensor covariante y alternante.
b) Formas diferenciales.

c) Versión local y coordenadas de una forma diferencial.
d) Definiciones alternativas del concepto de forma diferencial.
e) Tensor covariante y alternante.
f) Formas diferenciales de grado k.
g) Producto wedge. Base de las $k-$forma diferenciales.
h) Versión local y coordenadas de una $k-$forma diferencial.
i) Definiciones alternativas del concepto de $k-$forma diferencial.
j) $k-$Forma diferencial a lo largo de un subconjunto.
k) Forma de volumen. Orientación de una variedad diferenciable.
l) Orientación de una carta local o atlas.
m) Contracción.
n) Pullback.
ñ) Derivada exterior.
o) Forma cerrada y exacta. Definición de potencial.
p) Rotacional, gradiente y divergencia en el caso de $\mathbb{R}^3$.

3 *Cálculo integral*

3.1 **Orientación inducida** (5 horas; T-3h, P-2h).

3.2 **Integral sobre una variedad, de línea y superficie** (15 horas; T-10h, P-5h).

a) Soporte de una $k-$forma diferencial.
b) Particiones de la unidad. Existencia.
c) Integral de una $k-$forma diferencial. Relación con la orientación.
d) Volumen.
e) Teoremas de cambio de variable y de integración por parametrizaciones.
f) Integral de línea y superficie.

3.3 **Teorema de Stokes** (15 horas; T-10h, P-5h).

a) Teorema de Stokes. Consecuencias.

3.4 **Formas conservativas** (6 horas; T-3h, P-3h).

a) Forma conservativa.
b) Teorema fundamental de la integral de línea.
c) Relación con la noción de forma exacta.

4.5 **Lema de Poincaré** (9 horas; T-7h, P-2h).

a) Homotopía diferenciable.
b) Operador de homotopía. Existencia.
c) Equivalencia de homotopía.
d) Variedad diferenciable contráctil. Relación con la noción de estrellado.

e) Lema de Poincaré.
f) Exactitud local.

Mientras que los objetivos de aprendizaje pueden interpretarse como los *hitos* que el estudiante debe seguir para alcanzar la adquisición de los conocimientos y competencias esperados, los criterios de logro están orientados a proporcionar al alumno una guía clara sobre las acciones recomendadas para alcanzar dichos objetivos de aprendizaje. De hecho, estos criterios pueden entenderse como herramientas de autoevaluación para medir el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje.

Los criterios de logro se pondrán a disposición de los estudiantes a través de un foro, cuya función específica será permitirles el acceso a estos criterios y fomentar el debate entre ellos, con el fin de proponer modificaciones o añadir nuevos criterios que optimicen el proceso de aprendizaje.

Criterios de logro:

1 ***Variedades diferenciables***

1.2 **Estructura de variedad**

a) Diferenciar entre variedad topológica y variedad diferencial.
b) Comparar esta estructura con el espacio euclídeo.
c) Entender la motivación tras la imposición de Hausdorff y segundo contable.
d) Buscar ejemplos específicos, más allá del texto, de carta local, coordenadas, atlas y estructura diferenciable.
e) Estudiar la relación entre estos conceptos.
f) Comparar los puntos interior y frontera de una variedad con el interior y la frontera topológica.

1.3 **Algunas propiedades topológicas**.

a) Reflexionar sobre la relación entre conexo y conexo por caminos.
b) Comprender las implicaciones directas de las propiedades topológicas de las variedades diferenciables.

1.4 **Ejemplo de variedades diferenciables**.

a) Profundizar en detalle los ejemplos.
b) Intentar buscar algún ejemplo más por sí mismo.

2 ***Cálculo diferencial***

2.1 **Aplicaciones diferenciables**.

a) Comparar el concepto de diferenciabilidad con el estudiado en las asignaturas de cálculo de varias variables.
b) Escribir la versión local de una aplicación diferenciable sobre una variedad diferenciable específica.

2.2 **Fibrados tangente y cotangente**.

a) Comparar las nociones de derivadas con las estudiadas en las asignaturas de cálculo de varias variables.
b) Hallar derivadas de funciones particulares.
c) Explicitar la forma de las derivadas parciales, para una carta local en particular.
d) Reflexionar sobre las tres maneras de describir el espacio tangente en un punto. ¿Cómo se expresan en $\mathbb{R}^n$?
e) Ahondar en la naturaleza de "*espacio vectorial*" del espacio tangente. Relacionarlo con lo estudiado en las asignaturas de Álgebra lineal.
f) Calcular la expresión local y coordenadas de un vector tangente en un punto.
g) Detallar las coordenadas del fibrado tangente. ¿Cómo se expresan en $\mathbb{R}^n$?
h) Deliberar sobre las dos definiciones equivalentes de espacio cotangente.
i) Calcular la expresión local y coordenadas de un vector cotangente en un punto.
j) Detallar las coordenadas del fibrado cotangente. De nuevo, ¿cómo se expresan en $\mathbb{R}^n$?

2.3 **Aplicación inducida**.

a) Comparar la versión local de la aplicación inducida con la diferencial aprendida en los cursos de cálculo.
b) Calcular aplicaciones inducidas y derivadas exteriores de funciones específicas en un punto.

2.4 **Campos de vectores**.

a) Relacionar la noción de campo de vectores con la noción de sección.
b) Calcular la versión local y coordenadas específicas de un campo de vectores. Hacer este cálculo en ejemplos concretos.
c) Comparar las definiciones alternativas del concepto de campo de vectores.
d) Calcular el pushforward de un campo de vectores.

2.5 **Formas diferenciales**.

a) Trabajar la noción de tensor covariante y alternante. Buscar ejemplos.
b) Relacionar el concepto de forma diferencial con la noción de campo de vectores y, más en general, la noción de sección.
c) Calcular versión local y coordenadas de una forma diferencial. Trabajar dicha versión local en los ejemplos.

d) Comparar las definiciones alternativas del concepto de forma diferencial.
e) Relacionar el concepto de $k-$forma diferencial con las previas: forma diferencial, campo de vectores y, más en general, la noción de sección.
f) Calcular, de manera explícita, el producto wedge de $k-$formas diferenciales concretas.
g) Calcular la versión local y coordenadas de una $k-$forma diferencial. Hacer lo propio para los ejemplos.
h) Comparar todas las definiciones alternativas del concepto de $k-$forma diferencial.
i) ¿Cuál es la orientación natural de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$?
j) Calcular la expresión local de la contracción de una $k-$forma diferencial por un campo de vectores particular.
k) Realizar el cálculo específico de un pullback de una función sobre un campo de vectores concreto.
l) Calcular la derivada exterior de una $k-$forma diferencial específica.
m) Estudiar y reflexionar sobre las relaciones entre la contracción, el pullback, la derivada exterior y el producto wedge.
n) Comparar forma cerrada y exacta.
ñ) Relacionar la noción de potencial con las conocidas nociones de rotacional, gradiente y divergencia en el caso de $\mathbb{R}^3$.

3.3 **Orientación inducida**.

En este punto se recomienda profundizar y entender la necesidad de tratar con la orientación inducida sobre el borde de una variedad.

3 ***Cálculo integral***

4.1 **Integral sobre una variedad, de línea y superficie**.

a) Estudiar la coherencia de la integral cuando es posible definir una carta global.
b) Reflexionar sobre las posibles utilidades de las particiones de la unidad.
c) Calcular la versión local de la integral de una forma diferencial.
d) Relacionar la integral con la orientación. *¿Hasta que punto influye la elección de la orientación?*
e) Estudiar la definición de volumen y compararla con la aprendida en los cursos previos de cálculo de varias variables. *¿Puedes encontrar posibles "paradojas" con respecto a la intuición relativa al volumen?*
f) Relacionar los teoremas de cambio de variable y de integración por parametrizaciones con los resultados análogos estudiados en las asignaturas de cálculo.
g) Vincular la integral de línea y superficie con la integral en variedades.
h) Estudiar la relación entre la orientación de una superficie y la existencia de un campo de vectores normal y no nulo.

i) Trabajar ejemplos.

4.2 **Teorema de Stokes**.

a) Estudiar y comprender la demostración del teorema de Stokes.
b) Presentar la forma local del teorema de Stokes.
c) Profundizar en las consecuencias mostradas en esta sección. ¿Alguna más?

4.3 **Formas conservativas**.

a) Relacionar la noción de forma conservativa con la conocida sobre funciones de varias variables.
b) Entender a qué teorema fundamental de cálculo generaliza el teorema fundamental de la integral de línea.
c) Relacionar forma conservativa con la noción de forma exacta.

4.4 **Lema de Poincaré**.

a) Comprender en profundidad el significado y la intuición tras el término *homotopía (diferenciable)*.
b) Buscar y construir homotopías específicas.
c) Comprender las implicaciones para calcular integrales.
d) Relacionar variedad diferenciable contráctil con la noción de estrellado.
e) Reflexionar sobre las consecuencias del Lema de Poincaré y la noción de exactitud local. ¿Puede darse un resultado similar para *exactitud global*?

Además de lo desarrollado, y **anexo a los criterios de logro**, se aportará a los estudiantes una serie de *consideraciones generales* que pretenden servir como acciones que no son específicas a un tema en concreto, pero que ayudan a obtener el aprendizaje requerido. En este curso se presentarán las siguientes:

Consideraciones generales

1) **Intentar realizar por uno mismo, leer y comprender en profundidad las demostraciones:** La forma de razonamiento deductivo más común en matemáticas es la *demostración*, i.e., procedimiento que permite establecer la veracidad de un enunciado. El proceso de "*realizar una demostración*" entrena una habilidad o competencia que tiene repercusión positiva no solo en esta, sino en el resto de asignaturas del grado de Matemáticas. Aparte de los beneficios genéricos, una demostración contenida en el texto básico puede contener información valiosa sobre la utilidad del teorema o, incluso, puede probar alguna otra afirmación no contenida en el enunciado del teorema.

2) **Intentar responder a las preguntas:** El objetivo principal de las preguntas contenidas en los recuadros no es, necesariamente, que el lector obtenga la respuesta precisa. Su finalidad es que el estudiante reduzca la velocidad de lectura, y se pare a reflexionar sobre una cuestión que, a la larga, le ayudará a afianzar mejor el aprendizaje que debe adquirir.

3) **Realizar los ejercicios:** Los ejercicios contenidos en el texto están específicamente diseñados para que sirvan de apoyo para que el estudiante obtenga los conocimientos y competencias buscados.

4) **Utilizar los medios de la UNED:** Es altamente beneficioso sacar provecho de las ventajas propias de la UNED. Entre ellas se quisiera resaltar la figura del profesor-tutor y de los foros disponibles en la asignatura. Es recomendable utilizar estos dos recursos para exponer y discutir dudas de la asignatura. Esto podría ser fructífero más allá de obtener la respuesta en sí misma; se podrían crear debates en los se generen nuevas preguntas y se produzca aprendizaje a nivel de grupo.

2.10.5. El rol del Feedback en la asignatura

En la sección 2.7, se presentó una recomendación formulada por C. Lee [15], dividida en tres puntos específicos destinados a optimizar el aprovechamiento de la retroalimentación proporcionada al estudiante. Asimismo, se incluyó una lista de cinco criterios desarrollados por J. Giménez [11], que detalla los objetivos que deberían cumplir las preguntas planteadas en el proceso de retroalimentación dirigido al alumno. Basaremos el diseño de la retroalimentación en estos dos enfoques, adaptándola a cada una de las situaciones descritas a continuación.

- **Exámenes:** Ágora ofrece una plataforma de corrección de exámenes mediante la *Valija Virtual*, la cual permite al docente evaluar los exámenes digitalizados tras su escaneo. Adicionalmente, existe una plataforma de *Revisión de Solicitudes*, que el estudiante debe utilizar para presentar cualquier requerimiento de revisión de calificaciones. A través de estas herramientas, el docente tiene la posibilidad de proporcionar al estudiante una retroalimentación detallada y específica. Dicha retroalimentación estará basada fundamentalmente en los tres principios establecidos por C. Lee. De manera más detallada, siempre que sea posible, la retroalimentación se estructurará de la siguiente forma:

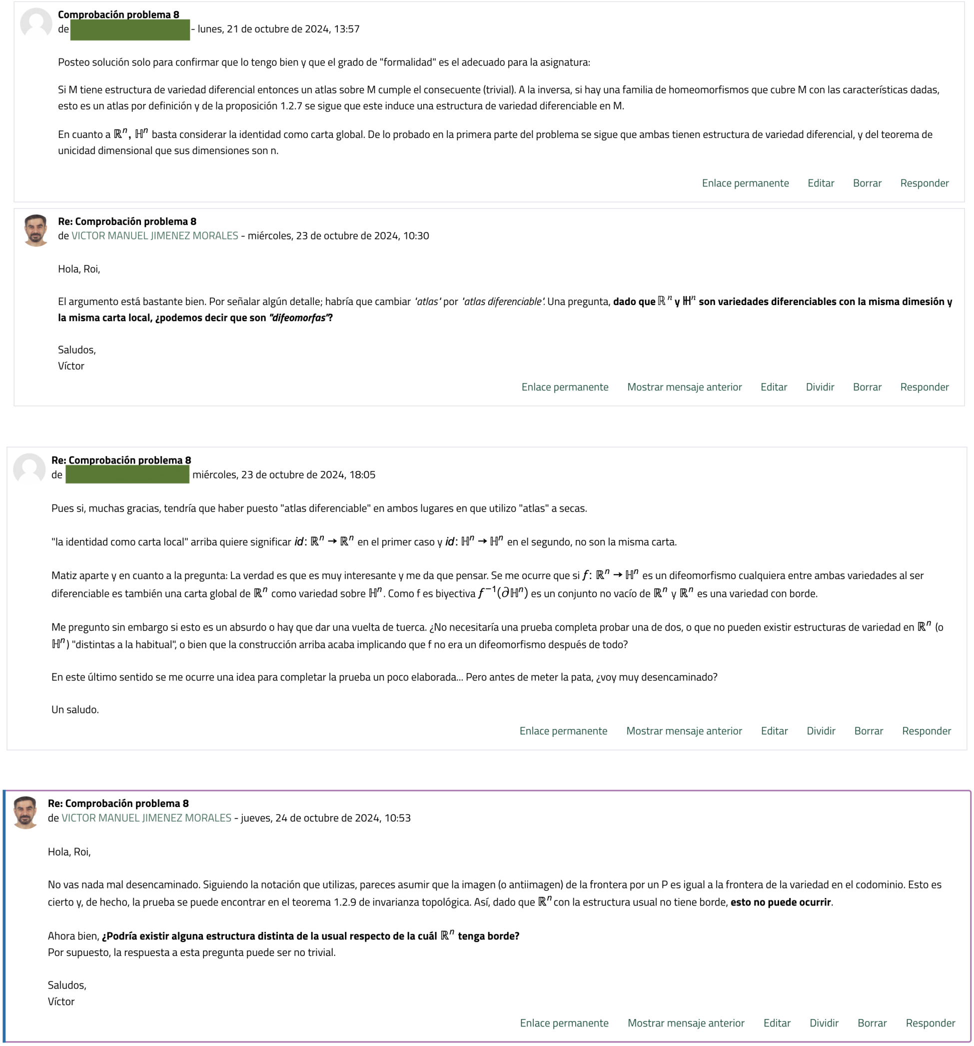
    1. Un primer párrafo exponiendo lo solicitado.
    2. Un comentario describiendo la producción del alumno. Aquí se debe indicar dónde se encuentra respecto a los objetivos.
    3. Una tercera parte indicando la solución y los posibles caminos para mejorar

- **Atención al estudiante:** Toda asignatura de la UNED debe contar con un horario específico de *Atención al Estudiante*, establecido en cuatro horas semanales. En el caso de esta asignatura, el horario asignado es de 10:30 a 14:30 todos los martes. De esta forma, el/la alumno/a dispone de un espacio para contactar al equipo docente y resolver sus dudas *en el momento*. En este contexto, el proceso de retroalimentación, al no ser escrito, será más *espontáneo*. Sin embargo, se procurará seguir los criterios establecidos por C. Lee [15] y, adicionalmente, se formularán preguntas que favorezcan un ambiente de discusión constructivo, facilitando así el proceso de aprendizaje del estudiante.

- **Foro:** El foro es, posiblemente, el medio más importante de interacción entre el docente y el estudiante en la UNED, por lo cual se prestará especial atención a la retroalimentación proporcionada a través de este recurso. Generalmente, el estudiante utiliza este canal para plantear cuestiones relativas a su propia comprensión del contenido de la asignatura. Estas pueden presentarse, entre otras, en forma de preguntas sobre un ejercicio específico, la interpretación de un resultado o la aplicación e intuición detrás de un concepto. Así, la retroalimentación seguirá, en términos generales, los tres principios de C. Lee [15], evitando proporcionar soluciones directas y fomentando que el estudiante llegue a ellas de manera autónoma.

  Además, dado que el foro es accesible a todos los estudiantes, se formularán preguntas propias (J. Giménez [11]) con el propósito de promover un entorno de discusión adecuado para la construcción colectiva del conocimiento. En este contexto, es relevante enfatizar la importancia de estimular al estudiante no solo a resolver las cuestiones planteadas en la asignatura, sino también a generar sus propias preguntas. Esto puede contribuir a despertar motivación e interés por el descubrimiento propio (*Aprendizaje por descubrimiento*, J. Bruner), el cual, en ciertos casos, podría llevar al estudiante a alcanzar un nivel de comprensión que trascienda los objetivos previstos en la asignatura.

Con objeto de detallar algo más la manera en la que se pretende lidiar con la retroalimentación en la asignatura, presentamos un caso específico de esta misma asignatura en el curso 2024/2025 (véase figura 2.10):



Comprobación problema 8
de [redacted] - lunes, 21 de octubre de 2024, 13:57

Posteo solución solo para confirmar que lo tengo bien y que el grado de "formalidad" es el adecuado para la asignatura:

Si M tiene estructura de variedad diferencial entonces un atlas sobre M cumple el consecuente (trivial). A la inversa, si hay una familia de homeomorfismos que cubre M con las características dadas, esto es un atlas por definición y de la proposición 1.2.7 se sigue que este induce una estructura de variedad diferenciable en M.

En cuanto a $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ basta considerar la identidad como carta global. De lo probado en la primera parte del problema se sigue que ambas tienen estructura de variedad diferencial, y del teorema de unicidad dimensional que sus dimensiones son n.

Enlace permanente Editar Borrar Responder

Re: Comprobación problema 8
de VICTOR MANUEL JIMENEZ MORALES - miércoles, 23 de octubre de 2024, 10:30

Hola, Roi,

El argumento está bastante bien. Por señalar algún detalle; habría que cambiar *'atlas'* por *'atlas diferenciable'*. Una pregunta, **dado que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$ son variedades diferenciables con la misma dimesión y la misma carta local, ¿podemos decir que son *"difeomorfas"*?**

Saludos,
Víctor

Enlace permanente Mostrar mensaje anterior Editar Dividir Borrar Responder

Re: Comprobación problema 8
de [redacted] miércoles, 23 de octubre de 2024, 18:05

Pues si, muchas gracias, tendría que haber puesto "atlas diferenciable" en ambos lugares en que utilizo "atlas" a secas.

"la identidad como carta local" arriba quiere significar $id\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en el primer caso y $id\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ en el segundo, no son la misma carta.

Matiz aparte y en cuanto a la pregunta: La verdad es que es muy interesante y me da que pensar. Se me ocurre que si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}^n$ es un difeomorfismo cualquiera entre ambas variedades al ser diferenciable es también una carta global de $\mathbb{R}^n$ como variedad sobre $\mathbb{H}^n$. Como f es biyectiva $f^{-1}(\partial\mathbb{H}^n)$ es un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$ es una variedad con borde.

Me pregunto sin embargo si esto es un absurdo o hay que dar una vuelta de tuerca. ¿No necesitaría una prueba completa probar una de dos, o que no pueden existir estructuras de variedad en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{H}^n$) "distintas a la habitual", o bien que la construcción arriba acaba implicando que f no era un difeomorfismo después de todo?

En este último sentido se me ocurre una idea para completar la prueba un poco elaborada... Pero antes de meter la pata, ¿voy muy desencaminado?

Un saludo.

Enlace permanente Mostrar mensaje anterior Editar Dividir Borrar Responder

Re: Comprobación problema 8
de VICTOR MANUEL JIMENEZ MORALES - jueves, 24 de octubre de 2024, 10:53

Hola, Roi,

No vas nada mal desencaminado. Siguiendo la notación que utilizas, pareces asumir que la imagen (o antiimagen) de la frontera por un P es igual a la frontera de la variedad en el codominio. Esto es cierto y, de hecho, la prueba se puede encontrar en el teorema 1.2.9 de invarianza topológica. Así, dado que $\mathbb{R}^n$ con la estructura usual no tiene borde, **esto no puede ocurrir**.

Ahora bien, **¿Podría existir alguna estructura distinta de la usual respecto de la cuál $\mathbb{R}^n$ tenga borde?**
Por supuesto, la respuesta a esta pregunta puede ser no trivial.

Saludos,
Víctor

Enlace permanente Mostrar mensaje anterior Editar Dividir Borrar Responder

Figura 2.10: Interacción real con estudiante en el foro

2.10.6. Estrategias de Innovación Digital sobre el texto base

Desde un punto de vista histórico, un libro se ha entendido como un conjunto de conocimiento «*encapsulado*» en formato escrito, destinado a ser leído de manera lineal. Este formato clásico, que ha sido la norma desde hace siglos, responde a una estructura física y conceptual que, aunque valiosa, puede presentar limitaciones en su capacidad para adaptarse al contexto social actual. Las nuevas tecnologías, en cambio, ofrecen la posibilidad de *expandir este concepto*, permitiendo que el libro deje de ser únicamente un medio estático para convertirse en una plataforma interactiva y dinámica.

En esta asignatura, se pretende desarrollar un texto base que aproveche las innovaciones tecnológicas, como el uso de *códigos QR* y la *Realidad Aumentada (RA)*, para ofrecer al estudiante una experiencia de aprendizaje que va más allá de la simple lectura de un libro, convirtiéndose en un *recorrido de aprendizaje* en diferentes formatos que busca motivar e incentivar un aprendizaje significativo de la asignatura. Esta metodología representa una evolución en el concepto de libro, donde el estudiante no solo accede a contenido escrito, sino que también puede interactuar con *videos explicativos*, *gráficos 3D* y *ejercicios resueltos en tiempo real.* Con ello, se busca no solo conservar la estructura fundamental del libro, sino también enriquecerla para favorecer una comprensión más profunda y visual de conceptos relacionados con el cálculo diferencial e integral en variedades diferenciables.

Las innovaciones que se buscan desarrollar sobre el texto base se detallan a continuación. Conviene subrayar que no todas ellas presentan el mismo grado de complejidad ni requieren idéntico horizonte temporal de ejecución. Por este motivo, y con el fin de ofrecer una planificación realista y honesta, se distinguen tres categorías de actuaciones:

i) Aquellas ya implementadas en el texto base o actualmente en proceso de implementación (identificadas mediante un cuadro verde ■).

ii) Aquellas cuya implantación se prevé a corton plazo (marcadas con un cuadro naranja ■).

iii) Aquellas que requieren del largo plazo (señaladas mediante un cuadro azul ■).

Actualmente, formo parte de un proyecto de innovación docente titulado "*Del Papel a la Pantalla: Textos que cobran vida*", con acrónimo $\pi-$Mat, financiado por la UNED que, entre otros, tiene como objetivo desarrollar una manera de implementar la herramientas que se van a presentar en este, y otros textos base de asignaturas de Grado de Matemáticas. Las innovaciones mencionadas se resumen en las siguientes:

■ **Vídeos vinculados a códigos QR:** A lo largo del texto, el lector encontrará diversos *códigos QR* asociados a videos cortos (con una duración estimada de 10 minutos). Estos videos estarán orientados a explicar conceptos considerados complejos, ofrecer intuiciones sobre determinados resultados, resolver ejercicios específicos, desarrollar ejemplos ilustrativos o incluso presentar demostraciones de teoremas. La generación de estos recursos no será *estática*; en cada curso, se habilitará un foro de debate donde los estudiantes podrán solicitar y justificar la inclusión de nuevos videos en el texto base. De esta manera, la colección de videos se mantendrá *interactiva* y actualizada, adaptándose de manera continua a las necesidades formativas de los estudiantes. Dada la naturaleza evolutiva de esta opción, los vídeos estarán disponibles para todos los estudiantes en el curso virtual, de manera que un estudiante pueda tener acceso a todos ellos aunque disponga de una versión desactualizada del texto base.

- **Realidad Aumentada (AR):** El texto base incluirá imágenes que, mediante un dispositivo móvil, podrán visualizarse en *Realidad Aumentada*. Esto permitirá al estudiante analizar gráficos de trayectorias o superficies desde múltiples ángulos, facilitando una comprensión visual tridimensional de los objetos matemáticos representados. Además, se propone que la Realidad Aumentada no se limite únicamente a imágenes estáticas; esta tecnología también podrá integrarse con *animaciones breves* que, por ejemplo, podrían permitir al estudiante observar, en 360 grados, la construcción progresiva de superficies como las regladas o las de revolución. La RA se presenta como un medio para convertir un libro de matemáticas avanzadas como este en un recurso más *amigable* e interactivo para el lector.

- **Autoevaluación:** Al final de cada tema, el libro ofrecerá un enlace a una prueba de autoevaluación en línea, de tipo test, la cual se corregirá automáticamente y proporcionará al lector una retroalimentación inmediata sobre su progreso en el aprendizaje. Dado que el enlace será un QR, el contenido del mismo puede actualizarse sin que el código QR varíe de tal manera que se actualizarán continuamente las pruebas de evaluación si prejucio para el texto base.

- **Agente de Inteligencia Artificial (IA):** Se plantea, como objetivo a medio–largo plazo, la incorporación de un agente de *Inteligencia Artificial* accesible mediante código QR desde el propio texto. Este asistente permitirá al estudiante interactuar con el contenido del libro de forma dirigida, pudiendo, por ejemplo, solicitar guías de estudio sobre un concepto concreto, localizar secciones donde aparezcan ejemplos de una determinada noción o, incluso, recibir recomendaciones de material complementario para profundizar en un tema.

  Las respuestas del agente deben fundamentarse exclusivamente en el contenido del texto base, salvo que el usuario solicite de manera explícita la consulta de fuentes externas. Debido a la complejidad técnica de esta herramienta, su implementación se contempla inicialmente como una línea de desarrollo a medio-largo plazo; no obstante, el rápido avance de estas tecnologías podría adelantar su despliegue efectivo.

Las innovaciones digitales presentadas en el texto base, pretenden modernizar la enseñanza de la asignatura de Campos y formas en la UNED y ofrece una serie de ventajas significativas que justifican su implementación:

- **Cercanía en la Enseñanza a Distancia de la UNED:** La implementación de estas innovaciones digitales en el texto base busca aproximar la experiencia de estudio a la de una clase presencial, fomentando una interacción activa del estudiante con el contenido. Esta estructura invita al lector a pausar su avance y detenerse en puntos específicos donde, mediante videos y recursos interactivos, se le explica un concepto complejo o se le guía en la resolución de un ejercicio. Con esta aproximación, se pretende acortar la brecha entre la modalidad de enseñanza a distancia de la UNED y la enseñanza en universidades presenciales, proporcionando al estudiante un apoyo educativo más inmediato y accesible, algo más parecido al que recibiría en una clase tradicional.

- **Accesibilidad y Flexibilidad de aprendizaje:** Los códigos QR proporcionan acceso inmediato a videos explicativos y materiales complementarios desde cualquier dispositivo móvil, lo cual es clave para estudiantes que buscan apoyo en el momento que lo necesitan, fuera del entorno del aula. Estas innovaciones permiten un aprendizaje autónomo y flexible, algo especialmente valorado en la educación superior y en modelos de enseñanza a distancia. Además, el acceso a videos cortos y a ejemplos prácticos mejora la retención de información al dividir el aprendizaje en unidades más fáciles de procesar.

- **Fomento de un aprendizaje visual e interactivo:** La Realidad Aumentada permite visualizar nociones y resultados complejos de manera gráfica y tridimensional. En matemáticas avanzadas, como el cálculo en variedades que es protagonista de esta asignatura, ciertos conceptos pueden ser difíciles de entender solo a través de texto o ecuaciones. La RA ofrece una solución interactiva que transforma conceptos abstractos en experiencias visuales, ayudando a los estudiantes a desarrollar una intuición espacial sobre objetos geométricos y sus propiedades. Como ejemplos de estas nociones podemos poner los campos de vectores, las superficies regladas o de revolución, o el cambio de cartas.

- **Motivación y compromiso activo del estudiante:** La inclusión de tecnologías interactivas aumenta la motivación y el compromiso. Al integrar videos y RA, los estudiantes pueden explorar conceptos de forma dinámica, lo cual es especialmente útil en el aprendizaje de temas complejos que requieren una comprensión visual. Estudios en pedagogía sugieren que el uso de herramientas digitales interactivas fomenta un aprendizaje más profundo, ya que los estudiantes se ven motivados a participar activamente en su proceso de aprendizaje y a explorar más allá de la teoría tradicional.

- **Evaluación Continua y Feedback inmediato:** Con videos explicativos vinculados a ejercicios específicos, los estudiantes pueden autoevaluarse en tiempo real y obtener retroalimentación inmediata. Este sistema permite un "*aprendizaje por refuerzo*", donde los estudiantes repasan conceptos de manera iterativa, ayudándoles a identificar y corregir errores de comprensión antes de que se acumulen en temas más avanzados. Por otro lado, los exámenes tipo test incluidos al final de cada tema, ayudan al estudiante a tener un Feedback continuo sobre su proceso de aprendizaje.

Estas innovaciones digitales no solo elevan la calidad del aprendizaje, sino que también buscan *posicionar al curso a la vanguardia de los métodos educativos*, al reflejar un enfoque pedagógico centrado en el estudiante y adaptado a las demandas de una educación moderna y digital. Además, responden a los objetivos fundacionales de la UNED, que promueven una adaptación continua de docentes y contenidos a las nuevas tecnologías. Más adelante, en el capítulo del contenido texto base ofrecido en esta memoria, se presentará un ejemplo algunas de estas innovaciones.

Contenido del texto de la asignatura

El contenido del texto básico de la asignatura se encuentra en el libro "*Integración en variedades*" [13]. Como se ha comentado, el contenido evaluable de la asignatura, que se concreta en el texto base, se divide en tres temas:

1. **Fundamentos**.
2. **Cálculo diferencial**.
3. **Cálculo integral**.

En esta memoria especificaremos en detalle el primer tema, el cual versa sobre los fundamentos teóricos en *variedades diferenciables*, para ejemplificar las innovaciones que se han mencionado. Los dos temas que siguen se presentarán resumidos, para que el lector entienda la estructura y contenido de los mismos. Se incluye, muy pormenorizada, la estructura de los dos apéndices que figuran a continuación, así como la bibliografía y las soluciones de los ejercicios del primer tema. Por último, se incluye el índice de contenidos.

En algunas partes de la exposición del contenido, el lector se encontrará con afirmaciones escritas en **verde oscuro**; esto no forma parte de los apuntes dirigidos al estudiante, sino que constituye un recurso propio de este proyecto docente para «*comunicarse*» con el evaluador con objeto de aclarar o puntualizar aspectos que lo requieran.

Índice de la asignatura

Tema 1.- Fundamentos

La esencia de este primer bloque es la introducción al estudio de variedades, tanto con borde como sin él. Desde una perspectiva intuitiva, estas estructuras pueden describirse como entidades matemáticas que localmente se asemejan al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Constituyen una generalización natural de dicho espacio y proporcionan el marco sobre el que versa este texto para la extensión de conceptos del cálculo diferencial e integral a entidades que exhiben, desde cierto punto de vista, «*formas*» que pueden tener algún tipo de «*curvatura*». Ejemplos típicos de tales variedades incluyen la esfera y la superficie de un toroide.

A lo largo de este texto, las variedades desempeñarán un papel central, puesto que el objetivo primordial es ampliar el alcance del cálculo diferencial e integral a las variedades diferenciables. En consecuencia, el enfoque predominante será el estudio de funciones definidas sobre estas variedades. Para un óptimo aprovechamiento del capítulo, se recomienda poseer un sólido entendimiento de los principios básicos de teoría de conjuntos, tales como la intersección y la unión, así como de conceptos fundamentales de cálculo, incluyendo la continuidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables.

En las primeras dos secciones del tema 1, se introducen los conceptos topológicos necesarios para comprender y trabajar con las variedades topológicas y diferenciables, tanto con borde como sin él, y se aborda la noción de función diferenciable sobre una variedad, tema que se explora con mayor profundidad en el segundo bloque. La sección siguiente está dedicada a demostrar algunas propiedades topológicas clave que confieren a estos espacios características similares a las de $\mathbb{R}^n$. Finalmente, la última sección se enfoca exclusivamente en el análisis de ejemplos concretos de variedades diferenciables, como son la esfera y el toroide mencionado.

Recurso visual que muestra la estructura global del primer tema.

1.1 Preliminares topológicos

Antes de introducir la noción de variedad, vamos a presentar el concepto de espacio topológico y algunas de sus propiedades fundamentales (para un estudio más detallado se recomienda [10, 20]). El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ sirve como modelo paradigmático en este contexto. En particular, destacamos dentro de este espacio una colección de conjuntos que se llamarán *abiertos*. Recordemos que las bolas abiertas se definen como

$$B_r^n(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x - a|| < r\} \ ,$$

es decir, el conjunto de puntos que distan de uno dado (a), llamado *centro*, menos que una cantidad determinada ($r > 0$), llamada *radio*. Aquí $|| \cdot ||$ denota la norma euclídea, dada por,

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \, , \quad \forall \, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, .$$

De esta manera, cualquier otro abierto de $\mathbb{R}^n$ se entenderá como aquel subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que se puede escribir como unión de bolas abiertas, y así generamos la conocida como ***topología usual*** de $\mathbb{R}^n$. En esta línea, definir una *topología* sobre un conjunto no es más que una manera *coherente* de especificar qué subconjuntos serán denominados *abiertos*. Esta estructuración no solo facilita la comprensión de espacios más complejos, sino que también es fundamental para el desarrollo posterior de la noción de variedad.

En este punto, **aparece el primero de los recuadros mencionados en las secciones anteriores**. Es pertinente invitar al lector a hacer una pausa reflexiva en su lectura. En numerosas ocasiones, se ha demostrado que es sumamente provechoso intentar abordar un problema de manera independiente antes de estudiar la solución propuesta en el texto. En este sentido, quizá sería interesante que el lector se planteara la siguiente cuestión:

> *Dado un conjunto arbitrario X, ¿cuál sería la mejor manera de definir cuáles son los «abiertos» de X? ¿Qué propiedades debería tener esta familia de abiertos para que la definición fuera coherente con la familia de abiertos del espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^n$?*

Definición 2.10.1 (Topología)**.** *Sea X un conjunto. Una **topología** en X consiste en una colección de subconjuntos T de X tales que:*

1. *El conjunto total X y el conjunto vacío $\emptyset$ son elementos de T.*
2. *La intersección finita de elementos de T es un elemento de T.*
3. *La unión arbitraria de elementos de T es un elemento de T.*

*Al par (X, T) se le denomina **espacio topológico**, y a los elementos de T se les llama **abiertos de** X.*

Cuando se sobreentienda la topología, diremos simplemente que X es un espacio topológico. Un subconjunto $S \subseteq X$ se dice ***cerrado*** si su complementario $X \setminus S$, denotado por S^c, es abierto.

Recordemos que, por definición, toda unión de abiertos es un abierto. Así, dado un espacio topológico (X, T), resulta natural definir una ***base de la topología de*** X como una colección $\mathcal{B}$ de abiertos $U \in T$ tales que cualquier otro abierto $U \in T$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Es importante observar que para definir de manera unívoca una topología sobre un conjunto, es suficiente proporcionar una base de la misma, ya que esta determina la estructura completa de los conjuntos abiertos del espacio. De hecho, dada una base $\mathcal{B}$ de la topología, podemos afirmar que *un subconjunto U de X es abierto si y solo si para todo $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$, tal que $x \in V \subseteq U$.*

Ejemplo 2.10.2 (Espacio euclídeo)**.** Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo de dimensión n. La ***topología usual*** de $\mathbb{R}^n$ es la única topología que tiene como base la familia de todas las bolas abiertas. Cabe destacar que el conjunto de todas las bolas con radio racional y centro con coordenadas racionales

$$\mathcal{B} = \{B_r^n(a) \;:\; a \in \mathbb{Q}^n \text{ y } r \in \mathbb{Q}\} \;,$$

es otra base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Una característica fundamental a destacar de esta base es que es *numerable.* $\diamondsuit$

Dadas dos topologías T y $\overline{T}$ sobre un conjunto X, se dice que T es ***más fina*** que $\overline{T}$ si $\overline{T} \subset T$. A grandes rasgos, una topología es más fina que otra si *divide al espacio en partes más pequeñas*, esto es, si contiene más abiertos.

Ejemplo 2.10.3 (Discreta e indiscreta)**.** Sea X un conjunto arbitrario. La ***topología indiscreta*** de X se denota por T_I y se define como la topología «*menos fina*» que se puede construir en X, es decir,

$$T_I \coloneqq \{\emptyset, X\} \;.$$

Por otro lado, la ***topología discreta*** de X, denotada por T_D, se define como la topología «*más fina*» que se puede asociar a X, esto es,

$$T_D \coloneqq \{S \;:\; S \text{ es un subconjunto de } X\} \;.$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 2.10.4 (Producto)**.** Sean (X, T_1) e (Y, T_2) dos espacios topológicos. Se define la ***topología producto*** $T_1 \times T_2$ como la topología sobre $X \times Y$ cuya base viene dada por

$$\mathcal{B} \coloneqq \{U_1 \times U_2 \;:\; U_1 \in T_1,\; U_2 \in T_2\} \;.$$

$\diamondsuit$

Sea (X, T) un espacio topológico. Se puede pensar en los abiertos de X como entornos que «*rodean*» a sus puntos y permiten estudiar las propiedades locales del espacio alrededor del punto. Sin embargo, existe una noción algo más general para dar rigor a esta idea intuitiva de «*entorno local de un punto*» que, en cierto modo, vendrá dada por subconjuntos que cumplen esta función para algunos de sus puntos.

Definición 2.10.5 (Entorno)**.** *Consideremos un espacio topológico* (X, T) *y un elemento* $x \in X$*. Se define un* ***entorno*** *de* x*, denotado como* U_x*, como un subconjunto de* X *para el cual existe un conjunto abierto* U *de* X *tal que*

$$x \in U \subseteq U_x\,.$$

Reformulando, un subconjunto se considera un entorno de un punto si y solo si incluye un conjunto abierto que a su vez contiene a dicho punto. Por consiguiente, es posible que un subconjunto funcione como entorno para ciertos puntos específicos que contiene sin serlo para todos los elementos del subconjunto. Es trivial verificar que todos los conjuntos abiertos de la topología son entornos para los puntos que contienen.

Además, si un subconjunto actúa como entorno para cada uno de sus puntos, entonces puede ser expresado como la unión de abiertos (pues es unión de todos sus puntos) y, por lo tanto, constituye un abierto dentro de la topología. Así, los conjuntos abiertos representan una categoría especial de entornos; *son los únicos que sirven como entornos para todos sus puntos.* Para entornos, es posible definir un concepto análogo al de base de la topología.

Definición 2.10.6 (Base de entornos)**.** *Sea* (X, T) *un espacio topológico y* $x \in X$*. Una familia* $\beta(x)$ *de entornos de* x *es una* ***base de entornos*** *de* x *si para todo entorno* U *de* x*, existe* $V \in \beta(x)$ *tal que* $V \subseteq U$*.*

Dado un espacio topológico (X, T). A cada subconjunto S de X se le puede asociar una serie de subconjuntos notables que cumplen la función de *clasificar* los puntos de X en relación con S. Un punto $x \in X$ se dice ***interior*** a S si existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq S$. De un modo opuesto, un punto $x \in X$ se dice ***exterior*** a S si existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq S^c$, esto es, x es un punto interior del complementario $S^c = X \setminus S$. Por último, un punto $x \in X$ se dice ***frontera*** de S si no es ni exterior ni interior. Dicho de otro modo, x es un punto frontera si todo abierto U que contenga a x tiene intersección no vacía con S y con S^c. Para hacerse una idea pictórica de estos conceptos, véase la figura 2.11.

La familia de todos los puntos interiores de S se denota por $\mathring{S}$, y se conoce como ***interior*** de S. El conjunto de todos los puntos frontera se denomina **frontera** de S, y se denota por ∂S. Por último, la ***clausura*** se denota por $\overline{S}$, y se define como la unión de S y su frontera.

Proposición 2.10.7. *Sea* (X, T) *un espacio topológico y* S *un subconjunto de* X*. Entonces,*

- *El interior de* S *es el mayor abierto contenido en* S*.*
- *La clausura de* S *es el menor cerrado que contiene a* S*, y está dada por*

$$\overline{S} \;=\; \mathring{S} \sqcup \partial S\,,$$

donde «⊔» denota la unión disjunta de conjuntos.

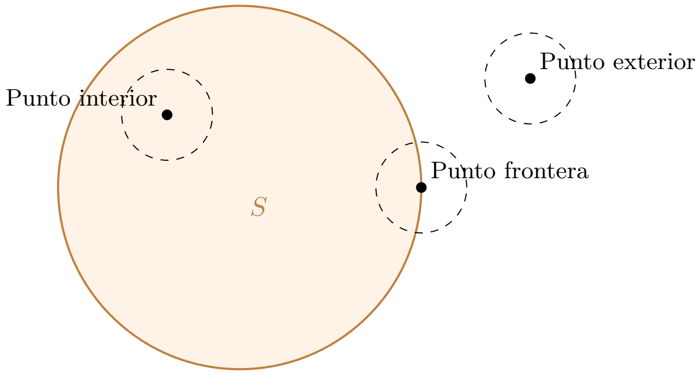


Figura 2.11: Puntos interior, frontera y exterior de un espacio topológico S

Consideremos la colección de todos los subconjuntos de X:

$$\mathrm{Sub}\,(X) \coloneqq \{S \;:\; S \subseteq X\}\ .$$

En el contexto de subconjuntos, el término *mayor* (respectivamente, *menor*) se refiere al máximo (respectivamente, mínimo) de una determinada familia de subconjuntos con respecto al orden parcial $\subseteq$. Observemos que, en general, estos máximos y mínimos no tienen por qué existir. No obstante, en el caso en particular de la proposición sí existen (pues se definen de manera explícita).

Obviamente, como consecuencia, un subconjunto S de un espacio topológico es abierto si y solo si $S = \mathring{S}$. Por otro lado, S es cerrado si y solo si $S = \overline{S}$.

Una vez introducido el concepto de topología, disponemos ya de un marco general para hablar de entornos, abiertos y cerrados sin necesidad de recurrir a coordenadas o distancias. Este lenguaje nos permite extender de forma natural muchas nociones del análisis clásico a contextos más generales. Una de las primeras ideas que se benefician de esta generalización es la de *continuidad*.

La continuidad de funciones de una o varias variables es un concepto profundamente relacionado con la noción de «*proximidad*». Una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en un punto a si, para todo valor $\epsilon > 0$, existe otro valor $\delta > 0$ tal que

$$||f\,(x) - f\,(a)\,|| < \epsilon \text{ siempre que } ||x - a|| < \delta\,,$$

donde $||\cdot||$ denota la norma euclídea en el espacio que corresponda. Es decir, que $f\,(a)$ está «*tan cerca como queramos*» de $f\,(x)$, siempre que a esté suficientemente próximo a x. En otras palabras, para toda bola abierta $B^m_\epsilon\,(f\,(a)) \subset \mathbb{R}^m$ de centro $f\,(a)$ y radio ϵ, existe otra bola abierta $B^n_\delta\,(a) \subset \mathbb{R}^n$ de centro a y radio δ tal que

$$f\,(B^n_\delta\,(a)) \subseteq B^m_\epsilon\,(f\,(a))\ ,$$

o, equivalentemente,

$$B^n_\delta (a) \subseteq f^{-1} (B^m_\epsilon (f (a))) \ .$$

Esto nos da ya una pista de cómo generalizar la noción de continuidad a espacios topológicos.

Definición 2.10.8 (Continuidad)**.** *Dados dos espacios topológicos* (X, T_1) *e* (Y, T_2)*, una aplicación* $f\colon X \to Y$ *se dice* ***continua en*** $\boldsymbol{x \in X}$ *si la antiimagen* $f^{-1}(U_{f(x)})$ *de cualquier entorno abierto* $U_{f(x)}$ *de* $f(x)$ *es un entorno abierto de* x*. La aplicación* f *se dice* ***continua*** *si lo es en todo punto.*

Es importante observar que *una función* f *es continua si y solo si la antiimagen por* f *de cualquier conjunto abierto es también un conjunto abierto.* Así, la definición topológica de continuidad se destaca por su *simplicidad* en comparación con la definición clásica basada en el criterio $\epsilon : \delta$. Este enfoque alternativo no solo simplifica la comprensión de la continuidad, sino que también alinea la noción con las estructuras topológicas subyacentes, facilitando así su aplicación en diversos contextos matemáticos.

Proposición 2.10.9. *Sean* (X_1, T_1) *y* (X_2, T_2) *dos espacios topológicos, y* $f\colon X \to Y$ *una aplicación. Entonces,* f *es continua si y solo si la antiimagen de todo cerrado es cerrado.*

La demostración se deja para el ejercicio 2.1. Consideremos dos espacios topológicos (X, T_1) e (Y, T_2). Si $T_2 = T_I$ o $T_1 = T_D$, entonces todas las funciones $f\colon X \to Y$ son continuas. Por otro lado, si $T_1 = T_I$ y $T_2 = T_D$, las únicas aplicaciones continuas son las constantes.

Ejemplo 2.10.10 (Topologías inicial y final sobre f)**.** Dados dos espacios topológicos (X_1, T_1) e (Y, T_2), y una aplicación $f\colon X \to Y$, llamaremos:

1. **Topología final** a la topología más fina sobre Y de tal manera que f es continua. Esta topología se denota por T_f.

2. **Topología inicial** a la topología menos fina sobre X de tal manera que f es continua. La topología inicial se denota por T^f.

Es sencillo comprobar (ejercicio 2.2) que las topologías final e inicial se pueden describir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_f &:= \left\{U \subseteq Y \ : \ f^{-1}(U) \in T_1\right\} \ , \\ T^f &:= \left\{f^{-1}(U) \ : \ U \in T_2\right\} \ . \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Estas topologías asociadas a una aplicación f son relevantes cuando se busca construir topologías que cumplan que ciertas funciones sean continuas. Dicho de otro modo, se utilizarán para construir topología a partir de ciertas funciones previamente definidas.

Ejemplo 2.10.11 (Subespacio)**.** Dado un espacio topológico (X, T), cualquier subconjunto $S \subseteq X$ se puede dotar de forma natural de una topología T_S, llamada ***topología de subespacio*** o ***topología inducida***, tomando como abiertos de S a la intersección con S de cada uno de los abiertos en T. En otras palabras, la topología de subespacio es la topología inicial de la inclusión $i_S : S \hookrightarrow X$. $\diamondsuit$

Salvo que se diga lo contrario, en el resto del libro consideraremos que la topología de cualquier subconjunto S de un espacio topológico X es la topología de subespacio.

Proposición 2.10.12. *Sea (X, T) un espacio topológico, y $S \subseteq X$. Entonces, S es abierto si y solo si $T_S \subseteq T$.*

Demostración. Observemos qué $T_S \subseteq T$ implica que $S \in T_S \subseteq T$, esto es, S es abierto en X. Recíprocamente, si S es abierto en X, la intersección de todo abierto de X con S es abierto en X y, por lo tanto, $T_S \subseteq T$. $\square$

Ejemplo 2.10.13 (Unión e intersección)**.** Sea X un conjunto, junto con T y $\overline{T}$ dos topologías sobre X. Entonces, la intersección $T \cap \overline{T}$ es una topología en X. Esta topología se llama ***topología intersección***. Por otro lado, es fácil notar que la unión $T \cup \overline{T}$ no será, en general una topología en X; pues ni la intersección ni la unión de dos elementos de $T \cup \overline{T}$ tienen quedarse en $T \cup \overline{T}$. De esta manera, se define la ***topología unión*** como la topología menos fina que se puede definir en X y que contiene a $T \cup \overline{T}$. En más detalle, esta topología se obtendrá tomando todas las intersecciones finitas y uniones arbitrarias de los elementos de $T \cup \overline{T}$. En lo sucesivo, para la topología unión adoptaremos la notación $T \cup \overline{T}$ con el fin de simplificar el texto, y evitaremos cualquier ambigüedad diferenciando, cuando sea preciso, entre unión de topologías y unión de conjuntos. $\diamondsuit$

Observemos que las nociones de topología inicial y final se pueden generalizar de la siguiente manera:

Definición 2.10.14 (Topologías inicial y final)**.** *Sea (Y_i, T_i) una familia arbitraria de espacios topológicos, indexada en un conjunto I. Para cada familia de aplicaciones $\mathcal{F}_I := \{f_i : Y_i \to X\}$ se define la **topología final** de $\mathcal{F}_I$, denotada por $T_{\mathcal{F}_I}$, como la topología más fina sobre X, de tal manera que todas las aplicaciones de $\mathcal{F}_I$ son continuas. Por otro lado, para cualquier familia de aplicaciones $\mathcal{F}^I := \left\{f^i : X \to Y_i\right\}$ se define la **topología inicial** de $\mathcal{F}^I$, denotada por $T^{\mathcal{F}^I}$, como la topología menos fina sobre X, de tal manera que todas las aplicaciones de $\mathcal{F}^I$ son continuas.*

Las topologías final e inicial de las familias $\mathcal{F}_I$ y $\mathcal{F}^I$ están dadas por

$$T_{\mathcal{F}_I} := \cap_{i \in I} T_{f_i} \,,$$
$$T^{\mathcal{F}^I} := \cup_{i \in I} T^{f_i} \,.$$

Dados dos espacios topológicos (X, T_1) e (Y, T_2), las proyecciones $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ y $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$, dadas por

$$\mathrm{pr}_X\,(x, y) = x \,, \quad \mathrm{pr}_Y\,(x, y) = y \,,$$

son continuas con la topología producto. De hecho, la topología producto es la topología inicial asociada a la familia de las aplicaciones dada por las proyecciones pr_X y pr_Y.

Definición 2.10.15 (Abierta o cerrada)**.** *Sean* (X, T_1) *e* (Y, T_2) *dos espacios topológicos. Una aplicación* $f : X \to Y$ *se dice **abierta** si* $f(U) \in T_2$ *para todo abierto* $U \in T_1$. *Análogamente, se dice que* f *es **cerrada** si* $f(C)$ *es cerrado para todo subconjunto cerrado* C.

Observemos que, intuitivamente, ser *abierta* (o *cerrada*) parece ser lo «*opuesto*» a ser continua. De hecho, da la impresión, de cierta manera, de que se está definiendo la *continuidad de la inversa* (en caso de que esta existiera).

Proposición 2.10.16. *Dada una aplicación biyectiva* $f : X \to Y$ *entre dos espacios topológicos* (X, T_1) *e* (Y, T_2)*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. f *es abierta,*
2. f *es cerrada,*
3. f^{-1} *es continua.*

Demostración. Dado que f es biyectiva, para cualquier subconjunto $S \subseteq X$, se tiene

$$f(S^c) = (f(S))^c .$$

Esto prueba que 1 y 2 son equivalentes. Por otro lado, f es abierta si y solo si para cada abierto U de X, $f(U)$ es abierto en Y. Dicho de otro modo, teniendo en cuenta de nuevo la biyectividad, $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto para todo abierto U de X, esto es, f^{-1} es continua. $\square$

Definición 2.10.17 (Homeomorfismo)**.** *Sean* (X, T_1) *e* (Y, T_2) *dos espacios topológicos. Una aplicación* $f : X \to Y$ *es un **homeomorfismo** si es continua, biyectiva y su inversa es continua. Si tal aplicación existe,* X *e* Y *se dicen espacios **homeomorfos**.*

En virtud de la proposición anterior, los homeomorfismos preservan abiertos y cerrados. Además, preservan el interior y la frontera.

Teorema 2.10.18. *Sean* (X, T_1) *e* (Y, T_2) *dos espacios topológicos, y* $f : X \to Y$ *un homeomorfismo. Entonces, para todo subconjunto* $S \subseteq X$*, se tiene que*

1. $f(\mathring{S}) = \mathring{\left(f(S)\right)}$,
2. $\overline{f(S)} = f(\overline{S})$,
3. $f(\partial S) = \partial\big(f(S)\big)$.

Demostración. Para demostrar este teorema, hay que tener en cuenta que un homeomorfismo es biyectivo, continuo y preserva abiertos y cerrados. Comencemos por demostrar 1. Dado un subconjunto S de X, $f\left(\mathring{S}\right)$ es abierto. Si consideramos otro abierto U contenido en $f(S)$, se tiene (por continuidad) que $f^{-1}(U)$ es abierto y está contenido en S. Por definición de interior $f^{-1}(U) \subseteq \mathring{S}$ y, por consiguiente, $f\left(f^{-1}(U)\right) = U \subseteq f\left(\mathring{S}\right)$. Es decir, $f\left(\mathring{S}\right)$ es el mayor abierto contenido en $f(S)$ o, lo que es lo mismo,

$$f\left(\mathring{S}\right) = \mathring{f(S)}\,.$$

La prueba de 2 es análoga. Por último,

$$\begin{aligned} f(\partial S) &= f\left(\overline{S} \setminus \mathring{S}\right) \\ &= f\left(\overline{S}\right) \setminus f\left(\mathring{S}\right) \\ &= \overline{f(S)} \setminus \mathring{f(S)} \\ &= \partial f(S)\ . \end{aligned}$$

□

La noción de homeomorfismo es crucial en topología, puesto que son aplicaciones que preservan cualquier propiedad topológica; desde el punto de vista topológico, dos espacios homeomorfos son *indistinguibles*. Esto es análogo a cuando en álgebra lineal dos espacios vectoriales se consideran indistinguibles si son linealmente isomorfos, o cuando en álgebra abstracta dos grupos se consideran indistinguibles si existe un isomorfismo de grupos entre ellos. Esta es una idea de suma importancia en muchas áreas de las matemáticas: no importa tanto un objeto en sí, sino la clase de equivalencia de todos los objetos que comparten las mismas propiedades relevantes para la cuestión que se está estudiando (su topología, su estructura algebraica, su estructura diferenciable, etc.). La idea matemática que subyace a esta intuición es la de «*categoría*», aunque dicho concepto queda fuera del alcance de este texto. Notemos que la noción de homeomorfismo no solo es central para entender la equivalencia topológica entre espacios, sino que también es esencial para la definición de conceptos nucleares de este texto, como los de variedad topológica y diferenciable.

Introduzcamos ahora algunas propiedades fundamentales que nos permiten clasificar los espacios topológicos. En primer lugar, los *axiomas de contabilidad* hacen alusión a la «*cantidad*» de entornos o abiertos que generan la topología. En base al objetivo del texto, estaremos interesados únicamente en el *segundo axioma de contabilidad*. En los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$, es usual trabajar con bases de la topología dadas por bolas abiertas. Esto permite, entre otras cosas, *dar una base numerable de la topología* inducida por aquellas bolas cuyo radio es un número racional (Ejemplo 2.10.2). El segundo axioma de contabilidad supone una generalización natural de esta propiedad.

Definición 2.10.19 (Segundo axioma de contabilidad)**.** *Un espacio topológico* (X, T) *es* ***segundo contable*** *(o* ***segundo numerable****) si podemos encontrar una base numerable de la topología.*

La propiedad de ser *segundo contable* aporta grandes beneficios sobre el espacio topológico. Muchas de estas ventajas tienen relación con la noción de *sucesión*. Una ***sucesión*** sobre un espacio topológico se define como una aplicación $x : \mathbb{N} \to X$, y se denota por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de tal manera que $x\,(n) = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.10.20 (Convergencia)**.** *Sea* (X, T) *un espacio topológico y* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión sobre* X*. Se dice que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge*** *a* x*, y se denota por* $x_n \to x$*, si, para todo entorno* U_x *de* x*, existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que,*

$$x_n \in U_x \quad \textit{siempre que } n \geq N\,.$$

Desde una perspectiva intuitiva, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ si, independientemente de cuán cerca estemos de x, siempre encontraremos todos los elementos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, salvo un número finito de ellos.

Proposición 2.10.21. *Sea* (X, T) *un espacio topológico segundo contable. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

- *Una aplicación* $f : X \to Y$ *entre espacios topológicos es continua si y solo si la sucesión* $\{f\,(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente a* $f\,(x)$ *siempre que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converja a* x *(Definición de Heine).*
- *Dado* $C \subseteq X$*, se cumple que* $x \in \overline{C}$ *si y solo si existe una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ *convergente a* x*.*
- *Un subconjunto* $C \subseteq X$ *es cerrado si y solo si toda sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ *convergente a* x *cumple que* $x \in C$*.*

De esta forma, el segundo axioma de contabilidad nos permite estudiar muchas propiedades topológicas utilizando sucesiones convergentes sobre el espacio topológico.

El otro tipo de axiomas que tienen interés son los *axiomas de separación*. Los axiomas de separación definen condiciones que nos permiten, de manera más o menos restrictiva, «*separar*» puntos del espacio. En el ámbito de este texto, se pone especial énfasis en el axioma $T2$, conocido también como *condición de Hausdorff*. Este axioma es crucial porque garantiza que, para cualquier par de puntos distintos en el espacio, existen entornos abiertos disjuntos que los separan, contribuyendo así a la precisión en el estudio de las propiedades topológicas de los espacios.

Definición 2.10.22 (Hausdorff)**.** *Un espacio topológico* (X, T) *se dice que es* ***Hausdorff*** *(o* ***T2****) si todo par de puntos distintos tiene entornos disjuntos, esto es, para todo* $x, y \in X$*, con* $x \neq y$*, existen sendos entornos* $U \ni x$ *y* $V \ni y$ *tales que*

$$U \cap V = \emptyset\,.$$

De nuevo, una de las propiedades más importantes que cumplen los espacios topológicos Hausdorff tiene relación con las sucesiones del espacio topológico.

Teorema 2.10.23. *En un espacio topológico Hausdorff el límite de toda sucesión convergente es único.*

La relevancia de este resultado subraya la importancia intrínseca de la propiedad de Hausdorff en la estructura de un espacio topológico. En ausencia de esta propiedad, pueden surgir fenómenos notablemente peculiares, como la existencia de múltiples límites para una sucesión dada (véase ejemplo 2.10.63).

Proposición 2.10.24. *Si X es un espacio topológico Hausdorff, entonces el conjunto $\{x\}$ es cerrado para todo punto $x \in X$.*

De este modo, todo espacio topológico Hausdorff cumple la propiedad, bastante intuitiva, de que todos los puntos del espacio son subconjuntos cerrados. Este es otro resultado interesante asociado a los espacios que cumplen la propiedad de ser Hausdorff, la cual impide que se den situaciones inesperadas.

Asimismo, podemos probar que dados dos espacios topológicos X e Y, si tanto X como Y son Hausdorff (respectivamente, segundo contable), entonces $X \times Y$ con la topología producto también es Hausdorff (respectivamente, segundo contable). La demostración se deja como ejercicio para el lector (ejercicio 2.4).

Aparte de ser *cerrado* o *abierto*, hay otras muchas propiedades topológicas que pueden cumplir los subconjuntos de un espacio topológico dado. La primera de estas características que se va a presentar es la de *conexo*. Intuitivamente, un espacio será conexo si es «*indivisible*», esto es, no consta de dos partes separadas. Dado que esta noción es fundamental para el desarrollo posterior, invitamos al lector (especialmente a quien utiliza este libro como herramienta de aprendizaje) a detenerse un momento y reflexionar sobre la siguiente pregunta:

> Disponiendo únicamente de un conjunto X y una topología T sobre X, *¿cómo formalizaría esta idea intuitiva de «estar hecho de una sola pieza»?*

Definición 2.10.25 (Conexo)**.** *Un espacio (X, T) es* ***conexo*** *cuando los únicos subconjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo son el vacío y el total. En caso contrario, (X, T) es* ***disconexo****.*

Uno puede imaginar un espacio topológico (X, T) que *no es de una sola pieza* como, al menos, dos piezas separadas. Dicho de otra manera, $X = A \sqcup B$, con $A, B \neq \emptyset$. Además, se ha de cumplir que $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$ (de no ser así, habría puntos frontera $x \in \partial A$ con $x \notin A$ o $x \in \partial B$ con $x \notin B$, de modo que no habría una clara división de X en dos partes). Entonces, A y B son cerrados. Además, $A^c = B$ y

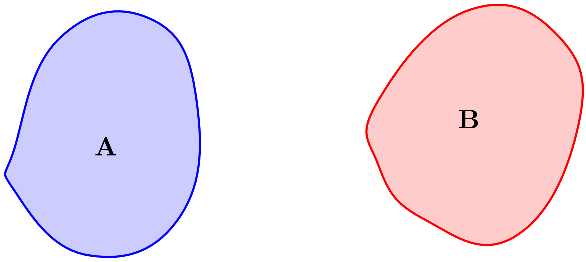


Figura 2.12: Espacio topológico disconexo $X = A \sqcup B$.

$B^c = A$, es decir, A y B también son abiertos. Por lo tanto, X se divide en dos «*trozos*» que son tanto abiertos como cerrados (véase la figura 2.12).

Proposición 2.10.26. *Un espacio topológico X es conexo si y solo si no existen dos abiertos (o dos cerrados) no vacíos cuya unión sea X y cuya intersección sea el vacío.*

Notemos que la propiedad de ser *conexo*, aunque puede parecer a priori muy geométrica, depende fuertemente de la topología del espacio. De hecho, sea X un conjunto arbitrario. Si consideramos la topología indiscreta T_I, únicamente hay dos abiertos en la topología y, por lo tanto, X es inmediatamente conexo. Por otro lado, si tomamos la topología discreta T_D, todos los puntos son al mismo tiempo abiertos y cerrados y, por lo tanto, X no es conexo (salvo que conste de un único punto).

Definición 2.10.27. *Sea (X, T) un espacio topológico. Un subconjunto S de X se dirá **conexo** si lo es con la topología de subespacio.*

Sean S y F dos subconjuntos conexos de X tales que $S \cap F \neq \emptyset$. Supongamos que existen dos abiertos no vacíos A y B de X tales que

$$(A \cap (S \cup F)) \sqcup (B \cap (S \cup F)) = S \cup F \neq \emptyset \,,$$

siendo $A \cap (S \cup F)\,, B \cap (S \cup F) \neq \emptyset$. Entonces, las situaciones posibles son las que siguen:

1. $S \subseteq A$. Entonces, $A \cap F$ y $B \cap F$ son abiertos no vacíos de F, y

   $$F = (A \cap F) \sqcup (B \cap F) \,,$$

   lo que contradice el hecho de que F sea conexo.

2. $S \neq A \cap S \neq \emptyset$. Luego,

   $$S = (A \cap S) \sqcup (B \cap S) \,,$$

   y $B \cap S \neq \emptyset$. De nuevo, esto contradice el hecho de que S sea conexo.

3. $A \cap S = \emptyset$. Entonces, $S \subseteq B$, y resulta en una situación análoga a la primera.

Por ende, necesariamente $S \cup F$ es un subconjunto conexo. Acabamos, así, de demostrar que *la unión de subconjuntos conexos con intersección no vacía es un subconjunto conexo.*

Definición 2.10.28 (Componente conexa)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico, y $x \in X$. La **componente conexa** de x viene dada por el mayor subconjunto conexo de X que contiene a x.*

Recordemos que el término «*mayor*» en este contexto hace referencia al máximo de una familia de subconjuntos de X. El contenido $\subseteq$ es un orden parcial en la colección de todos los subconjuntos de X y, por ello, el máximo no tiene por qué existir. No obstante, en este caso, es fácil observar que la componente conexa de x se puede definir explícitamente como la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x, luego no se darán problemas de este tipo. La familia de dichos subconjuntos conexos es siempre no vacía *¿Por qué?*

Notemos que, en base a este hecho, se puede afirmar que todo espacio topológico (X, T) se *puede separar, de forma única, como una unión disjunta de subconjuntos conexos.* A estos subconjuntos se les llama ***componentes conexas*** de X.

Proposición 2.10.29. *Sean (X, T_1) e (Y, T_2) dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces, $f(S)$ es conexo para todo subconjunto conexo $S \subseteq X$.*

En la búsqueda de formalizar, con precisión matemática, el concepto intuitivo de «*estar hecho de una sola pieza*», de manera natural, podemos llegar a una definición diferente. La clave de la nueva definición residirá en la idea intuitiva de que un conjunto *está hecho de una única pieza* si dos puntos cualesquiera del conjunto pueden ser «*conectados*» por una línea continua sin salirse del conjunto.

Definición 2.10.30 (Camino)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico. Un **camino** es una aplicación continua $\alpha : [a, b] \to X$, donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado, con la topología de subespacio de la topología usual de $\mathbb{R}$. El punto $\alpha(a)$ se denomina **origen** de α y $\alpha(b)$ se denomina **final** de α. Un camino se dice **cerrado** si el origen coincide con el final.*

Es importante notar que, a lo largo del texto, la noción de camino cobrará especial relevancia, sobre todo al tratar temas como la *integral de línea* en el tema 2.10.6. Dado un espacio topológico (X, T), hay ciertos caminos que cobran una importancia notable:

- Dado un punto $x_0 \in X$, el camino $c_{x_0}(t) = x_0$ para todo $t \in [a, b]$ se denomina ***camino constante*** en x_0.

- Dado un camino $\alpha : [a, b] \to X$, el ***camino inverso*** de α viene dado por

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(a + b - t) \ .$$

  Intuitivamente, si nos movemos de a a b por el camino α, el camino inverso α^{-1} corresponde a regresar de b a a por el mismo recorrido.

- Dados dos caminos $\alpha, \beta : [0,1] \to X$, el **camino producto** se define como

$$\alpha * \beta\,(t) = \begin{cases} \alpha\,(2t) & \text{si} \quad t \leq \frac{1}{2}\,, \\ \beta\,(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

Notemos que, aunque el camino producto se ha definido sobre caminos cuyo dominio es el $[0,1]$, esta definición es fácilmente extrapolable al resto de caminos; para ello basta con identificar el intervalo $[0,1]$ con cualquier otro intervalo cerrado $[a,b]$ mediante el homeomorfismo $t \mapsto bt - a\,(t-1)$. Por otro lado, es también importante resaltar que el camino producto es un camino propiamente dicho únicamente cuando $\alpha\,(1) = \beta\,(0)$, puesto que es una condición esencial para la continuidad del camino producto en el «*punto de unión*» (véase la figura 2.13).

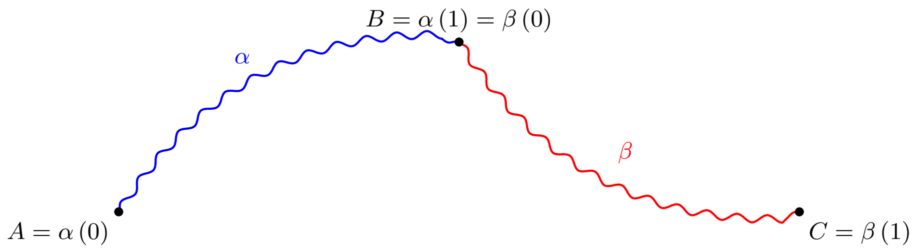


Figura 2.13: Camino producto $\alpha * \beta$.

Utilizando ahora la noción de *camino*, podemos dar un rigor diferente a la idea intuitiva de *pieza indivisible*.

Definición 2.10.31 (Conexo por caminos)**.** *Un espacio topológico X es **conexo por caminos** si, para todo par de puntos $x, y \in X$, existe un camino con origen igual a x y final igual a y.*

«*Uniendo caminos*» o, más rigurosamente, utilizando el camino producto, es fácil intuir que la propiedad de ser conexo por caminos se reduce a encontrar un punto que esté conectado con el resto por caminos (ejercicio 2.5).

Proposición 2.10.32. *Un espacio topológico X es conexo por caminos si y solo si existe un punto $x \in X$ tal que, para cualquier otro punto $y \in X$, existe un camino con origen igual a x y final igual a y.*

Análogamente a como ocurre con la propiedad de ser conexo, la condición de ser conexo por caminos se puede extrapolar a subconjuntos.

Definición 2.10.33. *Sea (X, T) un espacio topológico. Un subconjunto S de X se dirá **conexo por caminos** si lo es con la topología subespacio.*

Definición 2.10.34 (Componente conexa por caminos)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico, y $x \in X$. La* ***componente conexa por caminos*** *de x viene dada por el mayor subconjunto conexo por caminos de X que contiene a x.*

Sea (X, T) un espacio topológico, y $x \in X$. Análogamente a la componente conexa, la componente conexa por caminos de x se puede *describir explícitamente como el conjunto de todos los puntos $y \in X$ tales que existe un camino con origen igual a x y final igual a y.*

Tanto la noción de conexo como la de conexo por caminos pretenden formalizar la idea «*estar hecho de una única pieza*». Sin embargo, no parece sencillo identificar la relación que hay entre ellas.

- Con la topología indiscreta T_I sobre X, toda aplicación $\alpha : [a, b] \to X$ es continua y, por lo tanto, X es conexo por caminos. Además, con dicha topología X es obviamente conexo.

- Por otro lado, si consideramos la topología discreta T_D sobre X, entonces todos los puntos de X son abiertos y cerrados, de modo que X no es conexo (salvo que conste de un único punto). Sea $\alpha : [a, b] \to X$ una aplicación, entonces,

  $$[a, b] = \bigsqcup_{x \in X} \alpha^{-1}(x) .$$

  Por ello, si α es continua, $\alpha^{-1}(x)$ es abierto, y $[a, b]$ se escribe como unión disjunta de abiertos. Luego, dado que $[a, b]$ es conexo, α tiene que ser constante. En otras palabras, los únicos caminos sobre X son los constantes y, como consecuencia, X no es conexo por caminos salvo que conste de un único punto.

De este modo, las nociones de *conexo* y *conexo por caminos* coinciden en estas topologías y, así, uno podría estar tentado a extrapolar esta afirmación a cualquier espacio topológico. El siguiente resultado ayuda a entrever la relación que existe entre ambas definiciones.

Teorema 2.10.35. *Sea (X, T) un espacio topológico. Si X es conexo por caminos, entonces es conexo.*

Demostración. Dado que X es conexo por caminos, se puede escribir como unión de conexos no disjuntos, dados por las imágenes de todos los caminos con el mismo origen (dichas imágenes son conexas puesto que un camino es una aplicación continua sobre un intervalo cerrado, que es un conexo). □

Podría parecer razonable suponer que la afirmación recíproca también es válida. Sin embargo, como veremos a continuación, esto no es necesariamente cierto.

Contraejemplo 2.10.36 (Seno del topólogo)**.** Sea S el grafo de la aplicación, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, con $x \in (0, \infty)$, es decir,

$$S := \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ : \ x \in (0, \infty) \right\} .$$

Entonces, S es conexo por ser la imagen de un conexo por una aplicación continua. Consideremos los conjuntos

$$R = \{(0, y) \ : \ y \in [-1, 1]\} = \{0\} \times [-1, 1] ,$$

y

$$C = S \cup R .$$

El conjunto C es conexo, puesto que $C = \overline{S}$. No obstante, C resulta no ser conexo por caminos. La intuición sugiere que la dificultad se concentra en el punto $(0, 0)$. En esencia, el problema reside en que, por más próximos que nos situemos a dicho punto, la curva sigue recorriendo todos los valores del intervalo $[-1, 1]$, i.e., no acercarnos tanto como queramos en la segunda componente. Tanto a S como a C se les conoce como **seno del topólogo** (véase figura 2.14).

Tomemos un camino $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [0, 1] \to C$ tal que $\alpha(0) = (0, 0)$. Entonces, $\alpha(1)$ no puede estar en S. Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que $\alpha(1) \in S$. Eliminando, si es necesario, un segmento inicial del intervalo de definición y reescalando convenientemente, podemos suponer que,

$$\{0\} = \{t \in [0, 1] \ : \ \alpha([0, t]) = \{(0, 0)\}\} .$$

Por la continuidad de α, existe $\delta > 0$ tal que $|\alpha_1(t)|, |\alpha_2(t)| < 1$ para todo $t < \delta$. Dicho de otro modo, la imagen del intervalo $(0, \delta)$ por α es un conexo contenido en el cuadrado $(-1, 1)^2$. De esta manera hemos llegado, por tanto, a una contradicción. ♢

A partir de este ejemplo, se puede anticipar que la conexidad por caminos exige, además de la conexidad «*global*», el cumplimiento de cierta condición de carácter local.

Definición 2.10.37 (Localmente conexo y conexo por caminos)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico. Se dice que X es* ***localmente conexo*** *si todo punto tiene una base de entornos conexos. Se dice que X es* ***localmente conexo por caminos*** *si todo punto tiene una base de entornos conexos por caminos.*

De manera análoga a las anteriores, se pueden extender las nociones de localmente conexo y localmente conexo por caminos a subconjuntos de un espacio topológico usando la topología de subespacio. Obviamente, todo espacio localmente conexo por caminos es un espacio localmente conexo.

Proposición 2.10.38. *Un espacio topológico X es localmente conexo si y solo si las componentes conexas de los abiertos de X son abiertas en X.*

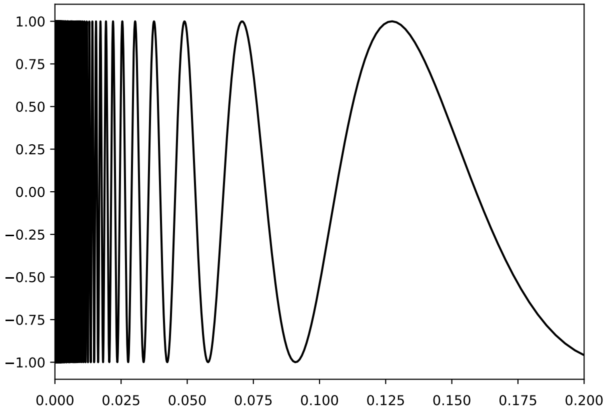


Figura 2.14: Seno del topólogo.

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo, y tomemos un subconjunto abierto U de X. Sea $x \in U$, y U_x la componente conexa de x en U. Por otro lado, dado que el espacio es localmente conexo, x tiene una base de entornos conexos y, por lo tanto, existe un entorno conexo C_x de x contenido en U. Sin embargo, al ser conexo, debe ocurrir que

$$C_x \subseteq U_x .$$

Haciendo lo mismo para todos los puntos, se prueba que U_x es un subconjunto abierto. El recíproco es trivial. □

Uno podría encontrar algo complejo el hecho de imaginar un espacio que no cumpla la propiedad de ser *localmente conexo* (o, en su defecto, que no cumpla que las componentes conexas de sus abiertos sean abiertas). Se recomienda al lector estudiar si el seno del topólogo es localmente conexo en el $(0, 0)$.

De manera análoga a la definición 2.10.38, se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 2.10.39. *Un espacio topológico X es localmente conexo por caminos si y solo si las componentes conexas por caminos de los abiertos de X son abiertas en X.*

En este punto, podemos demostrar un resultado que explicita cuál es la propiedad local adecuada que debe cumplir un espacio topológico conexo para ser conexo por caminos. Este análisis detallado contribuye a profundizar nuestro entendimiento de la estructura interna de los espacios topológicos, permitiéndonos discernir entre la conexión y la conexión por caminos, sabiendo que la segunda implica una condición más fuerte que la primera.

Teorema 2.10.40. *Un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos es conexo por caminos.*

Demostración. Sea (X, T) un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos. Teniendo en cuenta la definición 2.10.39, las componentes conexas por caminos de X separan el espacio en una unión disjunta de abiertos. Dado que el espacio es conexo, esta familia de abiertos tiene que ser unitaria, es decir, no hay más de una componente conexa por caminos. □

Corolario 2.10.41. *Si un espacio topológico es localmente conexo por caminos, las componentes conexas por caminos coinciden con las componentes conexas.*

De nuevo, resulta trivial notar que ser conexo por caminos se preserva por aplicaciones continuas.

Proposición 2.10.42. *Sean (X, T_1) e (Y, T_2) dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces, $f(S)$ es conexo por caminos para todo subconjunto conexo por caminos $S \subseteq X$.*

Demostración. Para todo camino $\alpha\colon [a, b] \to S$, la composición $f \circ \alpha\colon [a, b] \to f(S)$ es un camino en $f(S)$. Si dos $x, y \in S$ cualesquiera pueden unirse por un camino α, sus imágenes $f(x), f(y) \in S$ se pueden unir por el camino $f \circ \alpha$. □

Así, hemos descrito y relacionado dos características diferentes que formalizan la idea intuitiva de *estar hecho de una única pieza.*

Buscamos ahora introducir la propiedad de *compacidad.* Los conjuntos compactos se pueden imaginar como una generalización de los intervalos cerrados $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Está claro que estos conjuntos tienen muy buenas propiedades; por ejemplo, las funciones continuas alcanzan siempre un máximo y un mínimo. En la búsqueda por formalizar esta propiedad en espacios topológicos genéricos, uno podría pensar que se refiere a subconjuntos cerrados. Sin embargo, el intervalo $[0, \infty)$ es cerrado en $\mathbb{R}$, lo cual sugiere que la propiedad de ser *cerrado* puede resultar insuficiente para satisfacer las expectativas de la definición de compacto en contextos más generales.

Intuitivamente, un conjunto compacto requiere, además, cierto carácter de «*pequeñez*», no necesariamente en términos de tamaño, sino en términos de su estructura topológica. En el espacio euclídeo, esta *pequeñez* se manifiesta en términos de *acotación.* Así, los compactos del espacio euclídeo son los subconjuntos cerrados y acotados, lo que sí encaja mejor con los intervalos de la forma $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$. No obstante, en un contexto más general, esta definición se queda algo escasa. En este sentido, un conjunto compacto se define a través de *recubrimientos abiertos del espacio.*

Definición 2.10.43 (Recubrimiento abierto)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico. Un **recubrimiento** $\mathcal{A}$ de X viene dado por una colección de subconjuntos de X tal que su unión es X. Un **subrecubrimiento** de X asociado a $\mathcal{A}$ es un recubrimiento $\overline{\mathcal{A}}$ de*

X contenido en $\mathcal{A}$. Decimos que el recubrimiento o el subrecubrimiento es ***abierto*** *si los subconjuntos que lo componen son abiertos.*

Con esta definición en mente, un espacio será *compacto* si cualquier recubrimiento abierto se puede «*reducir*» hasta el punto de que únicamente queden un número finito de abiertos.

Definición 2.10.44 (Compacto)**.** *Un espacio topológico X es* ***compacto*** *si cualquier recubrimiento abierto admite un subrecubrimiento finito.*

Notemos que cualquier conjunto X con la topología indiscreta T_I es inmediatamente compacto (únicamente disponemos de dos abiertos). Por otro lado, si consideramos la topología discreta T_D, X es compacto si y solo si X se compone únicamente de un número finito de puntos.

Definición 2.10.45. *Sea (X, T) un espacio topológico y S un subconjunto de X. Diremos que S es* ***compacto*** *si lo es con la topología de subespacio.*

Definición 2.10.46 (Recubrimiento abierto de un subconjunto)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico y S un subconjunto de X. Un* ***recubrimiento abierto*** *$\mathcal{A}$ de S en X viene dado por una colección de subconjuntos abiertos de X tal que su unión contiene a S. Un* ***subrecubrimiento abierto*** *de S en X asociado a $\mathcal{A}$, es un recubrimiento abierto $\overline{\mathcal{A}}$ de S en X contenido en $\mathcal{A}$.*

Así, se puede fácilmente caracterizar la propiedad de ser compacto sobre subconjuntos de un espacio topológico, utilizando abiertos del espacio total.

Proposición 2.10.47. *Sea (X, T) un espacio topológico. Un subconjunto S de X es compacto si y solo si todo recubrimiento abierto de S en X admite un subrecubrimiento finito de S en X.*

Comprobemos que, en efecto, cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto. Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Probemos primero que, *para cada $a \leq x < b$, existe un $c_x > x$ tal que $[x, c_x]$ puede ser cubierto, a lo sumo, por dos abiertos de $\mathcal{A}$*. Sea $U_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U_x$. Si $\mathcal{A} = \{U_x\}$, entonces la existencia de un subrecubrimiento compacto es trivial. En caso contrario, la intersección $[a, b] \cap U_x$ es una unión de intervalos disjuntos de tal manera que uno de ellos contiene a x y, por ende, debe existir un $z_x > x$, tal que

$$[x, z_x) \subseteq [a, b] \cap U_x \,.$$

Tomando $c_x = z_x$, ya tenemos nuestro intervalo $[x, c_x]$ que puede ser cubierto, a lo sumo, por dos abiertos de $\mathcal{A}$. Consideremos ahora el siguiente conjunto:

$$C := \{y \in (a, b] \ : \ [a, y] \text{ puede ser cubierto por un número finito de abiertos de } \mathcal{A}\}$$

Dado que C es un subconjunto de los números reales no vacío, tiene la propiedad del *límite superior mínimo*, es decir, existe un único número $d_{\text{mín}} \leq b$ tal que es el número mínimo que satisface que $z \leq d_{\text{mín}}$, para todo $z \in C$. Es fácil ver que $d_{\text{mín}} \in C$ (únicamente haría falta un abierto más para cubrir $[a, d_{\text{mín}}]$).

Supongamos que $d_{\text{mín}} < b$. Hemos probado que existe un número $d_{\text{mín}} < c_{d_{\text{mín}}} \leq b$ tal que $[d_{\text{mín}}, c_{d_{\text{mín}}}]$ puede ser cubierto, a lo sumo, por dos abiertos de $\mathcal{A}$. Por lo tanto, $c_{d_{\text{mín}}} \in C$ y $d_{\text{mín}} < c_{d_{\text{mín}}}$ lo que contradice la condición de máximo de $d_{\text{mín}}$. Así, tiene que ocurrir que $d_{\text{mín}} = b$ y, en consecuencia, existe un subrecubrimiento abierto finito de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ asociado a $\mathcal{A}$, es decir, $[a, b]$ es compacto en $\mathbb{R}$. Generalizando esta prueba a dimensión n se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.10.48. *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que $[a, b]^n$ es un compacto en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.*

Análogamente a como ocurría con *conexidad* y *conexidad por caminos*, la compacidad se preserva por continuidad.

Proposición 2.10.49. *Sean (X, T_1) e (Y, T_2) dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces, $f(S)$ es compacto para todo subconjunto compacto S de X.*

Demostración. Sea S un subconjunto compacto de X. Tomemos un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $f(S)$. Entonces, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento abierto de S. Dado que S es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^r$. Luego, $\{U_i\}_{i=1}^r$ es un subrecubrimiento finito de $f(S)$ asociado a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. □

Como se mencionó anteriormente, la noción de compacidad en topología está estrechamente vinculada con la propiedad de ser cerrado. Este vínculo es fundamental para entender cómo se comportan los subconjuntos compactos dentro de diferentes contextos topológicos, especialmente en relación con la clausura de un subconjunto y las propiedades de las funciones continuas definidas sobre estos.

Proposición 2.10.50. *Sea (X, T) un espacio topológico. La intersección de un compacto y un cerrado es un compacto.*

Demostración. Sea C un compacto y F un cerrado. Entonces,

$$C = (C \cap F) \cup (C \cap F^c) .$$

Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de $C \cap F$ en X. Entonces $\overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{F^c\}$ es un recubrimiento abierto de C en X. Tomando un subrecubrimiento abierto finito asociado a $\overline{\mathcal{A}}$, obtenemos otro para $\mathcal{A}$. □

Corolario 2.10.51. *Todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto.*

Notemos que en $\mathbb{R}^n$ hay una familia de compactos que conviene destacar: *las bolas cerradas*. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces la bola cerrada con centro a y radio r se define como el conjunto

$$\overline{B}_r^n(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x - a|| \leq r\} .$$

Observemos que, dada la continuidad de la norma $||\cdot||$, $\overline{B}_r^n(a)$ es la clausura de la bola abierta $B_r^n(a)$. Como consecuencia directa de este último corolario y del definición 2.10.48, se tiene que las bolas cerradas son compactas. Este hecho, junto con definición 2.10.48, se generaliza en el teorema de Heine–Borel, un resultado fundamental previamente discutido al introducir el concepto de compacidad.

Teorema 2.10.52 (Heine–Borel)**.** *Todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es compacto.*

Este resultado es tan importante que cuando un espacio topológico cumple que todo cerrado y acotado es compacto, se dice que satisface la ***propiedad de Heine–Borel***.

Con objeto de abordar el recíproco, observemos que, cuando el espacio topológico cumple la propiedad de ser Hausdorff, podemos afirmar aquello que dicta la intuición: *los conjuntos compactos son cerrados.*

Teorema 2.10.53. *Todo subconjunto compacto de un espacio topológico Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sea C un subconjunto compacto de un espacio topológico Hausdorff X. Consideremos un punto $x \in C^c$ arbitrario. Entonces, dado que el espacio es Hausdorff, para todo $y \in C$, existen dos entornos abiertos U_y y V_y de x e y, respectivamente, tales que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Teniendo en cuenta que C es compacto, el recubrimiento abierto de C dado por los abiertos V_y admite un subrecubrimiento abierto finito $\{V_{y_i}\}_{i=1}^l$. El abierto $U_x = \cap_{i=1}^l U_{y_i}$ contiene a x y, además, $U_x \cap C = \emptyset$. Concluimos que $C^c = \cup_x U_x$ es abierto. □

En el espacio euclídeo se demuestra que los conjuntos compactos no solo son cerrados, como establece el teorema anterior, sino que además son acotados. Esta propiedad constituye el recíproco del teorema de Heine-Borel y es de suma importancia, ya que proporciona una caracterización adicional de los conjuntos compactos en el espacio euclídeo.

Proposición 2.10.54. *Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado.*

Demostración. Hemos probado ya que todos los compactos de $\mathbb{R}^n$ son cerrados. Por último, tomando un recubrimiento del compacto en cuestión por bolas abiertas, probamos que está contenido en una unión finita de bolas y, por ende, es acotado. □

De esta manera, hemos comprobado que en $\mathbb{R}^n$ los compactos son los cerrados y acotados. Este resultado es fácilmente generalizable a los llamados *espacios métricos*, pero, dado que no es objeto de este texto, no trataremos con esta generalización (véase [10] para más detalles).

Finalmente, es importante destacar una familia de subconjuntos íntimamente relacionados con los compactos.

Definición 2.10.55 (Precompacto)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico. Un subconjunto S se dice* ***precompacto*** *si su clausura $\overline{S}$ es un conjunto compacto.*

Un primer ejemplo de conjunto precompacto viene dado por las bolas abiertas, dado que la clausura de una bola abierta es una bola cerrada. Por otro lado, es fácil comprobar que todo compacto de un espacio Hausdorff es también precompacto.

Definición 2.10.56 (Localmente compacto)**.** *Un espacio topológico X es* ***localmente compacto*** *si, para todo punto $x \in X$, existe un compacto C_x que contiene un entorno de x.*

Notemos que un entorno contenido en un compacto es, inmediatamente, un subconjunto precompacto. Así, *un espacio topológico X es localmente compacto si y solo si todo punto $x \in X$ tiene un entorno precompacto.*

Considérese un elemento x perteneciente al espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$. La colección de todas las bolas abiertas con centro en x constituye una base para los entornos abiertos de x en $\mathbb{R}^n$. Por tanto, podemos afirmar que $\mathbb{R}^n$ se estructura como un espacio topológico localmente compacto. El propósito principal de este texto es facilitar una introducción rigurosa al cálculo diferencial e integral en el contexto de variedades, para lo cual la capacidad de seleccionar un entorno precompacto para cualquier punto en una variedad es de gran utilidad.

1.2 Estructura de variedad

Entremos ahora en la definición de un tipo específico de espacio topológico en el que estamos especialmente interesados: variedades. A grandes rasgos, una variedad es un espacio topológico que *localmente* funciona igual que un «*espacio modelo*». En este contexto, abordaremos dos tipos distintos de espacios *modelo.*

En el primer caso, este espacio *modelo* será el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. El segundo espacio *modelo* se denomina ***semiespacio superior cerrado n-dimensional*** $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$, y se define como

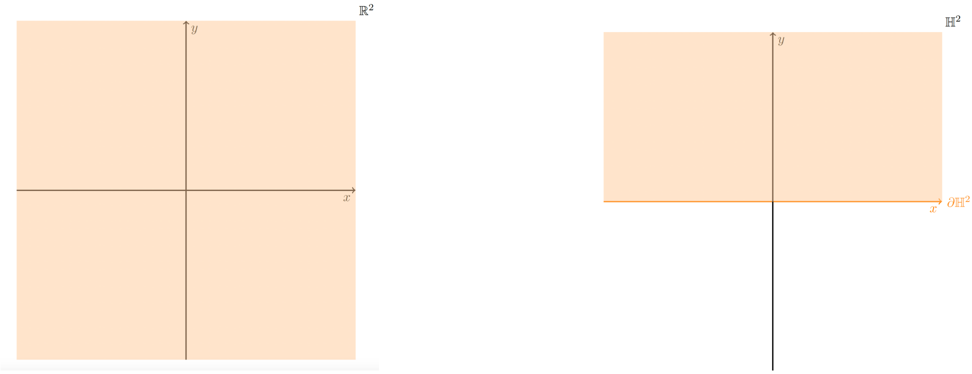
$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n \geq 0\} \ .$$

Es decir, viene dado por el subconjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ cuya última coordenada cartesiana es no negativa. Se definen el ***interior*** y la ***frontera*** de $\mathbb{H}^n$ como el interior y la frontera topológica de $\mathbb{H}^n$ en $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\textbf{Interior} : \mathring{\mathbb{H}}^n = \text{Int } \mathbb{H}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n > 0\} \ ,$$
$$\textbf{Frontera} \text{ o } \textbf{borde} : \partial\mathbb{H}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 0\} \ .$$

De este modo, el semiespacio $\mathbb{H}^n$ se escribe como unión disjunta de su interior y su frontera. A los puntos que pertenecen a $\mathring{\mathbb{H}}^n$ se les denomina ***puntos interior***, mientras que a los puntos que están en $\partial\mathbb{H}^n$ se les llama ***puntos frontera***. Observemos que $\mathring{\mathbb{H}}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. De hecho, todo abierto de $\mathbb{H}^n$ que no contenga puntos frontera es, además, un abierto en $\mathbb{R}^n$ (ejercicio 2.7). Por otro lado, notemos que $\partial\mathbb{H}^n$ es un cerrado con interior vacío, una propiedad que se reflejará más adelante sobre variedades (definición 2.10.76).

Tenemos así nuestros dos espacios modelo: $\mathbb{R}^n$, y $\mathbb{H}^n$. A lo largo del texto se utilizará la notación de $\mathbb{K}^n$, que denotará a $\mathbb{R}^n$, o $\mathbb{H}^n$ según el contexto.



(a) $\mathbb{R}^2$ (b) $\mathbb{H}^2$

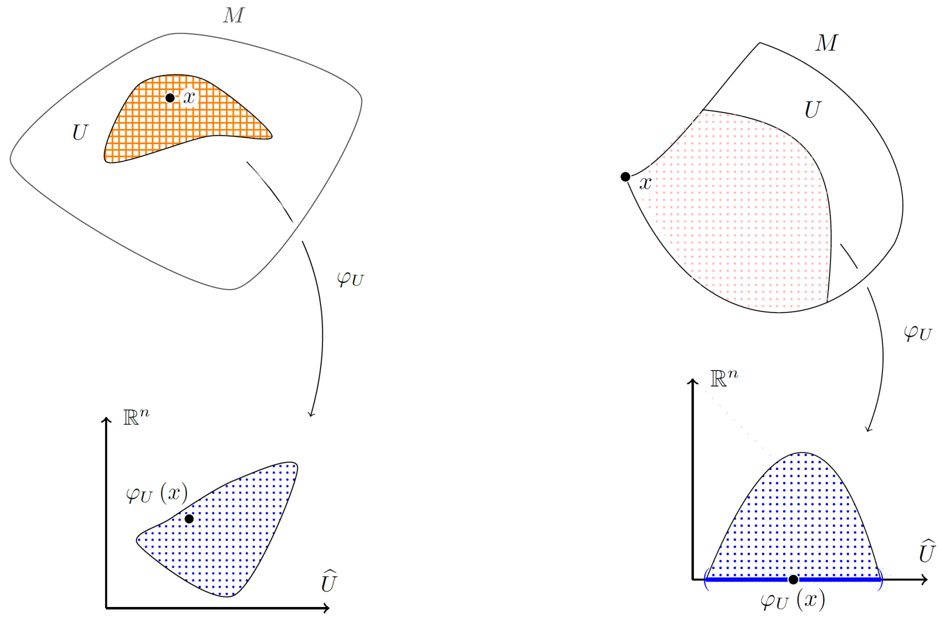
Figura 2.15: Diferentes formas de $\mathbb{K}^2$.

Definición 2.10.57 (Variedad topológica)**.** *Diremos que un espacio topológico M es una **variedad topológica de dimensión** n si es Hausdorff, segundo contable y localmente homeomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Es necesario en este punto aclarar el sentido exacto del término *localmente homeomorfo*. Se dice que M es localmente homeomorfa a $\mathbb{K}^n$ si, para todo punto $x \in M$, existe un entorno abierto $U \subseteq M$ de x y un homeomorfismo $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$, con $\widehat{U}$ un abierto de $\mathbb{K}^n$. Notemos que $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, luego uno podría pensar que todo homeomorfismo $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ se puede entender como un homeomorfismo $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. No obstante, esto no es necesariamente cierto. Podemos diferenciar entre dos casos posibles (figura 2.16):

(a) Si $\widehat{U}$ es un abierto de $\mathbb{H}^n$ contenido en $\mathring{\mathbb{H}}^n$, por la definición 2.10.12, $\widehat{U}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por ello, la aplicación $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierta, biyectiva y continua, es decir, es un homeomorfismo (definición 2.10.16).

(b) Si $\widehat{U}$ es un abierto de $\mathbb{H}^n$ con intersección no vacía con $\partial\mathbb{H}^n$, entonces $\widehat{U}$ no es abierto como subconjunto de $\mathbb{R}^n$. En consecuencia, $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ no es abierta y, por ende, no puede ser un homeomorfismo.



(a) $\mathring{\mathbb{H}}^n$ (b) $\partial\mathbb{H}^n$

Figura 2.16: Diferentes tipos de homeomorfismos locales sobre $\widehat{U}$.

Recíprocamente, un homeomorfismo $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ no es, directamente, un homeomorfismo $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, puesto que $\widehat{U}$ no tiene que estar contenido en $\mathbb{H}^n$. Por estas razones utilizamos la nomenclatura de $\mathbb{K}^n$ para referirnos al *espacio modelo*, siendo $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ o bien $\mathbb{K}^n = \mathbb{H}^n$, en función del caso que estemos tratando.

Observemos que el conjunto vacío cumple todas las condiciones de la definición 2.10.57. Sin embargo, en general, salvo que se explicite claramente, excluiremos el conjunto vacío cuando nos refiramos a las variedades topológicas.

A lo largo del presente texto, se presentarán en numerosas ocasiones expresiones de la forma $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$. En este contexto, a menos que se especifique lo contrario, se asumirá que $\widehat{U} = \varphi_U(U)$.

Ejemplo 2.10.58 (Espacio euclídeo)**.** Para cualquier n entero positivo, $\mathbb{R}^n$, con la topología usual, es una variedad topológica de dimensión n. Obviamente, el espacio euclídeo es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, y el homeomorfismo viene dado por la identidad $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Por otra parte, $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff, puesto que para cada par de puntos distintos x e y en $\mathbb{R}^n$ es posible considerar sendas bolas abiertas $B^n_\varepsilon(x) \ni x$ y $B^n_\delta(y) \ni y$ de radios ε y δ lo bastante pequeños para que $B^n_\varepsilon(x) \cap B^n_\delta(y) = \emptyset$. Además, cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como unión de bolas $B_r^n(x)$ de centro $x \in \mathbb{Q}^n$ y radio $r \in \mathbb{Q}$, lo cual hace a $\mathbb{R}^n$ segundo contable. Así, $\mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión n. Es importante observar que el homeomorfismo definido tiene su imagen en un abierto de $\mathbb{R}^n$; esto más adelante se identificará con el concepto de *variedad sin borde.* $\diamondsuit$

Ejemplo 2.10.59 (Espacio vectorial)**.** Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Entonces, existe una base $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V que induce un isomorfismo lineal $F_{\mathcal{B}}$ de V en $\mathbb{R}^n$, de tal manera que para todo $v = \lambda^i e_i \in V$, se tiene que,

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \left(\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right).$$

De esta manera, dado que $F_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo de V en $\mathbb{R}^n$, la topología inicial $T^{F_{\mathcal{B}}}$ convierte a V en una variedad topológica. Es decir, todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n es una variedad de dimensión n «*difeomorfa*» (**??**) a $\mathbb{R}^n$. $\diamondsuit$

Ejemplo 2.10.60 (Espacio afín)**.** Todo espacio afín X tiene, por definición, una familia de aplicaciones biyectivas asociada. Estas aplicaciones dotan a X de una topología de variedad topológica (ejercicio 2.8). $\diamondsuit$

Ejemplo 2.10.61 (Semiespacio superior cerrado)**.** El conjunto $\mathbb{H}^n$ es una variedad topológica, con la identidad como homeomorfismo global (ejercicio 2.6). $\diamondsuit$

Ejemplo 2.10.62 (Carta global)**.** Sea X un conjunto tal que existe una aplicación biyectiva $F : X \to \mathbb{K}^n$. Entonces, *la topología inicial T^F convierte a X en variedad topológica de dimensión n.* En efecto, $\left(X, T^F\right)$ es un espacio topológico de tal manera que F es biyectiva y continua. Además, F es abierta puesto que $F\left(F^{-1}(U)\right) = U$, para todo abierto $U \subseteq \mathbb{K}^n$ y $T^F := \left\{F^{-1}(U) : U \text{ es un abierto de } \mathbb{K}^n\right\}$. Como consecuencia F es un homeomorfismo, i.e., $\left(X, T^F\right)$ es un espacio topológico homeomorfo a $\mathbb{K}^n$ y, por lo tanto, es una variedad topológica de dimensión n. Observemos que $\left(X, T^F\right)$ es, obviamente, Hausdorff y segundo contable, puesto que ambas son propiedades topológicas preservadas por F^{-1}. Más generalmente, *la existencia de una aplicación biyectiva entre un conjunto X y una variedad topológica M permite dotar a X de una estructura de variedad topológica homeomorfa a M.* $\diamondsuit$

Notemos que las variedades topológicas se han definido sujetas a una topología; es decir, fijado un espacio topológico, se definen las condiciones necesarias para que este espacio sea una variedad topológica. Una cuestión, quizá poco relevante para la finalidad de este libro, pero divertida e instructiva en cualquier caso, podría ser plantearse un «*problema inverso*».

Sea X un conjunto arbitrario, y $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{K}^n\}_{\alpha\in A}$ una familia de aplicaciones biyectivas definidas sobre subconjuntos de X de tal manera que

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X \,.$$

¿Qué condiciones deberían darse para que existiera una topología T en X, de tal manera que (X,T) fuera una variedad topológica y cada aplicación φ_a fuera un homeomorfismo?

Uno podría pensar que las condiciones de *Hausdorff* y *segundo contable* no son condiciones naturales. Incluso se podría intuir que, dado que, en cualquiera de los casos, $\mathbb{K}^n$ cumple ambas condiciones, la condición de ser *localmente homeomorfo a* $\mathbb{K}^n$ debería implicar las otras dos. El siguiente ejemplo aporta una muestra de lo que podría ocurrir si no exigimos la propiedad de ser Hausdorff a nuestro espacio topológico.

Contraejemplo 2.10.63. Sean $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, con $a\neq b$. En el plano $\mathbb{R}^2$, se define la **recta con dos orígenes** como sigue:

$$r_{a,b} = \{(t,0)\,,\ (0,a)\,,(0,b)\ :\ t\neq 0\}\ .$$

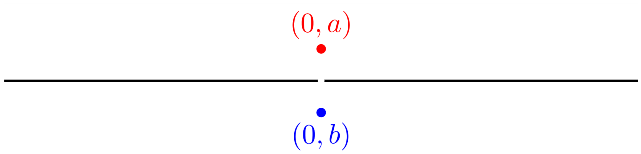


Figura 2.17: Recta con dos orígenes.

Definamos una topología en $r_{a,b}$. Notemos que $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ luego, para cada $t\neq 0$, existe un intervalo abierto $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$ que contiene a t. De esta forma, para un punto $(t,0)$, con $t\neq 0$, podemos definir una base de entornos abiertos dada por los conjuntos de la forma $I\times\{0\}$, tal que I es un intervalo abierto con $t\in I$ y $0\notin I$.

Por otro lado, para $s=a,b$, una base de entornos abiertos de $(0,s)$ viene dada por

$$E_s := \left\{\Big(\big(J\setminus\{0\}\big)\times\{0\}\Big)\cup\{(0,s)\}\ :\ J\ \text{ es un intervalo abierto que contiene al } 0\right\}$$

Es fácil ver que la topología generada por estas bases de entornos abiertos no es Hausdorff. De hecho, no es posible separar los puntos $(0,a)$ y $(0,b)$ con dos entornos. Efectivamente, cualquier entorno de $(0,s)$, con $s\in\{a,b\}$, es de la forma

$$U_s = \Big(\big(J_s\setminus\{0\}\big)\times\{0\}\Big)\cup\{(0,s)\}\ ,$$

con $J_s \subset \mathbb{R}$ un entorno de 0, de modo que la intersección,

$$U_a \cap U_b = \Big((J_a \setminus \{0\}) \times \{0\} \Big) \cap \Big((J_b \setminus \{0\}) \times \{0\} \Big) = (J_a \cap J_b) \setminus \{0\} \times \{0\},$$

es un conjunto no vacío. No obstante, por otro lado, el espacio es segundo contable y localmente homeomorfo a $\mathbb{R}$. La propiedad de ser segundo contable la hereda de $\mathbb{R}$, mientras que, para cada $s = a, b$, se puede considerar el homeomorfismo dado por

$$\begin{array}{rccl} \varphi_s : & (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\} \cup \{(0,s)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,. \end{cases} \end{array}$$

Desde un enfoque intuitivo, lo único que hace este homeomorfismo es «*colocar*» el punto $(0,s)$ en el $(0,0)$. Notar que, aunque parezca atentar contra la lógica de una aplicación continua, es un homeomorfismo precisamente por la manera en la que hemos descrito la topología de $r_{a,b}$. ♢

Con este (contra)ejemplo, hemos comprobado que la condición de ser *Hausdorff* no es redundante. Es importante recordar que ser *Hausdorff* es esencial para disponer, entre otras cosas, de la propiedad de que toda sucesión convergente tiene un único límite.

Por otro lado, la condición de ser *segundo contable* es crucial para que la noción de dimensión de una variedad sea *consistente*; una variedad no debería tener más de una dimensión asociada.

Contraejemplo 2.10.64. Consideremos el plano $\mathbb{R}^2$. Con la topología estándar, este conjunto tiene estructura de variedad topológica de dimensión 2 (véase el ejemplo 2.10.58). No obstante, un cambio de topología puede cambiar este hecho. Dado un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, y un punto $y \in \mathbb{R}$, podemos definir el conjunto

$$I_y \coloneqq \{(t,y) \ : \ t \in I\} \ .$$

Estos conjuntos están representados en la figura 2.18. Se construye entonces una topología (no estándar) en $\mathbb{R}^2$ cuya base $\mathcal{B}$ está dada por los conjuntos I_y, con I un intervalo abierto e $y \in \mathbb{R}$. Es decir, los abiertos de esta topología serán uniones arbitrarias e intersecciones finitas de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ «*colocados*» a la altura y.

Esta topología es Hausdorff: para cada par de puntos $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ con $(x,y) \neq (x',y')$, se pueden dar dos casos:

1. Si $y \neq y'$, entonces para cada par de intervalos abiertos $I \ni x$ e $I' \ni x'$, los entornos $I_y \ni (x,y)$ e $I'_{y'} \ni (x',y')$ cumplen $I_y \cap I'_{y'} = \emptyset$.

2. Si $y = y'$, podemos tomar dos entornos I y J en $\mathbb{R}$ tales que $x \in I$, $x' \in J$ e $I \cap J = \emptyset$. A partir de ellos, podemos definir dos entornos disjuntos I_y y J_y en $\mathbb{R}^2$.

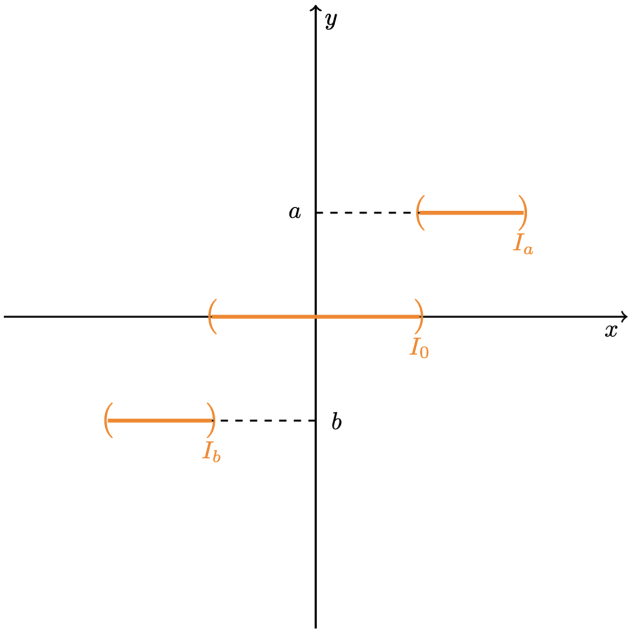


Figura 2.18: Abiertos de la topología en el ejemplo 2.10.64.

Sin embargo, la topología definida no es segundo contable, por el simple hecho de que el cardinal de los números reales es estrictamente mayor que el cardinal de los números naturales. Además, todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se encuentra contenido en el conjunto abierto

$$\mathbb{R}y = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

de la topología considerada. Está claro que $\mathbb{R}y$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ (con el homeomorfismo $(x, y) \mapsto x$). En consecuencia, bajo esta topología, $\mathbb{R}^2$ exhibe una estructura localmente homeomorfa a $\mathbb{R}$, i.e., $\mathbb{R}^2$ se convierte en una variedad diferenciable de dimensión 1.

Por otro lado, notemos que, para cada $r > 0$ y $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, la bola abierta $B_r^2(a_1, a_2)$ de radio $r > 0$ y centro (a_1, a_2) se puede expresar como

$$\begin{aligned} B_r^2(a_1, a_2) &= \{(x, y) \;:\; ||(x - a_1, y - a_2)|| < r\} \\ &= \left\{(x, y) \;:\; |y - a_2| < r,\; a_1 - \sqrt{r^2 - (y - a_2)^2} < x < \sqrt{r^2 - (y - a_2)^2} + a_1\right\}, \end{aligned}$$

es decir, como la unión infinita

$$B_r^2(a_1, a_2) = \bigcup_{y \in (a_2 - r, r + a_2)} (I^y)_y \;, \quad (I^y)_y := \{(t, y) \mid t \in I^y\} \;,$$

donde

$$I^y = \left(a_1 - \sqrt{r^2 - (y - a_2)^2}, \sqrt{r^2 - (y - a_2)^2} + a_1\right).$$

En particular, cabe remarcar que todos los subconjuntos $(I^y)_y$ pertenecen a la base $\mathcal{B}$ que definimos más arriba, es decir, son abiertos de $\mathbb{R}^2$ con la topología *exótica* que estamos considerando. Recordemos que, al mismo tiempo, las bolas abiertas forman una base de la topología estándar de $\mathbb{R}^2$ (véase el Ejemplo 2.10.58).

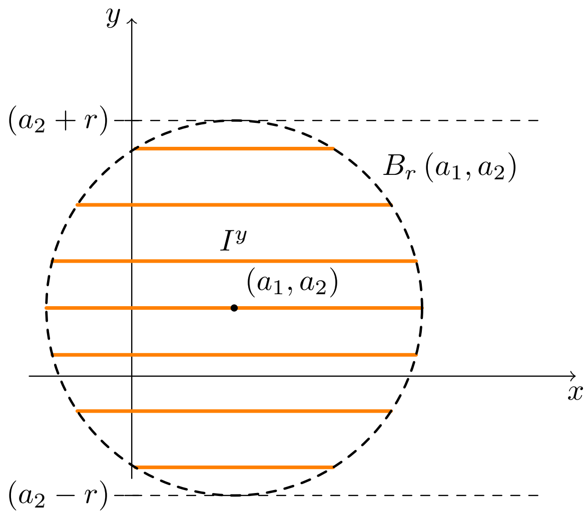


Figura 2.19: $B_r^2\,(a_1, a_2)$ como unión de intervalos.

En resumen, hemos probado que, alrededor de cualquier punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$, existe un entorno abierto $\mathbb{R}y$ homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología usual, y otro entorno abierto $B_r(x, y)$ homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ con la topología usual. En otras palabras, con esta topología, $\mathbb{R}^2$ es al mismo tiempo, localmente homeomorfa a $\mathbb{R}$ y a $\mathbb{R}^2$. Así, si no se impone la condición de ser segundo contable, se presenta el curioso escenario donde $\mathbb{R}^2$ es una variedad topológica de dimensiones 1 y 2 simultáneamente. $\diamondsuit$

Teorema 2.10.65 (Invariancia de la dimensión)**.** *Una variedad topológica no vacía de dimensión n no puede ser (localmente) homeomorfa a una variedad topológica de dimensión m, con $n \neq m$.*

Demostración. En esencia, se trata de probar que $\mathbb{K}^n$ no puede ser localmente homeomorfo a $\mathbb{K}^m$ si $n \neq m$, tal y como cabría esperar intuitivamente. Sin embargo, la prueba se aleja del foco de este texto. Para ver una prueba detallada de este resultado, se recomienda consultar el capítulo 13 de [17] o el capítulo 17 de [16]. $\square$

Se muestra ahora el primer ejemplo de *cuadro de diálogo*, que incita al lector a reflexionar sobre el sentido mismo de dimensión de una variedad topológica.

Notemos que la noción de dimensión invita, de hecho, a una reflexión aún más profunda.

A finales del siglo XIX, Georg Cantor introdujo una idea que resultó profundamente contraintuitiva: distintos objetos geométricos, de tamaños aparentemente dispares, pueden tener la misma cardinalidad. La posibilidad de establecer una biyección entre conjuntos geométricamente muy distintos no surge de manera accidental, sino en un contexto histórico muy concreto: *el nacimiento de la teoría de conjuntos y la necesidad de formalizar la noción de infinito.*

Los primeros resultados relevantes aparecen en los trabajos de G. Cantor durante la década de 1870. En su célebre artículo de 1877, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" [Una contribución a la teoría de conjuntos][a] [4], Cantor demuestra un hecho que resultó profundamente perturbador para la intuición geométrica de la época: *los cardinales de* $[0,1]$ *y* $[0,1]^2$ *coinciden.*

El objetivo de Cantor no era geométrico, sino conjuntista. Su interés principal consistía en comparar el «*tamaño*» de conjuntos infinitos. No obstante, estos resultados inciden directamente en la teoría desarrollada en este texto. De hecho, se pueden percibir como una amenaza a la *noción de dimensión*. Si la recta real y el plano tienen el mismo número de puntos, entonces todo elemento del plano puede ser determinado unívocamente por un valor real y, de este modo, uno se podría hacer la siguiente pregunta:

¿Se rompe la noción misma dimensión dada en el texto?

Parece claro que la respuesta es la siguiente: la dimensión no es una noción conjuntista, sino topológica. En particular, *no se puede mejorar más el teorema 2.10.65.*

Como curiosidad, un salto conceptual se produce en 1890 con el trabajo de G. Peano, titulado "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane" [Sobre una curva que rellena toda un área plana] [21]. En este artículo, Peano construye explícitamente una aplicación continua

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$$

que es sobreyectiva. Este resultado parece ir mucho más allá del de Cantor. Aquí ya no se trata solo de una biyección abstracta, sino de una función continua, lo que parecía reforzar la idea de que una curva podía «*comportarse*» como una región bidimensional.

[a] Literalmente, «teoría de variedades» (*Mannigfaltigkeit*). El término *Mengenlehre para* «teoría de conjuntos» se consolidó posteriormente.

Sin embargo, el punto crucial es el siguiente: *la aplicación de Peano es continua, pero no es inyectiva en ningún sentido local.* En cada vecindad del intervalo aparecen infinitas auto-intersecciones, y la estructura local unidimensional se destruye por completo en la imagen.
Aunque los resultados de G. Peano son interesantes, dada la inyectividad, para esta discusión nos interesan más los trabajos presentados G. Cantor. En particular, existe una biyección

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Podemos, entonces, tomar b como la inversa de una carta global de $\mathbb{R}^2$. Como consecuencia, en base al ejemplo 2.10.62 (véase más adelante el ejemplo 2.10.69), existe sobre $\mathbb{R}^2$ una única estructura de variedad topológica de dimensión 1. Dicho de otro modo, $\mathbb{R}^2$ se puede ver, al mismo tiempo, como variedad topológica unidimensional y bidimensional, sin perder ninguna de las "*exigencias*" topológicas por el camino (Hausdorff, segundo contable y localmente homeomorfa). De hecho, yendo un poco más allá, del mismo modo se prueba la siguiente afirmación:

> Para cualesquiera números naturales r y n mayores o iguales a 1, existe una topología sobre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ que lo convierte en una variedad topológica de dimensión r.

Sin el conocimiento y desarrollo previamente presentado, uno podría estar tentado a rechazar esta afirmación como absurda. No obstante, se trata de una muestra más de la singular belleza de la matemática abstracta, capaz de demostrar con rigor absoluto la veracidad de afirmaciones que dejan fuera, o parecen contradecir, la intuición cotidiana; una ciencia que no persuade por analogía ni por evidencia empírica directa, sino por la coherencia interna de sus argumentos, mostrando que incluso las ideas más alejadas del sentido común pueden ser, en un sentido profundo, necesariamente verdaderas.
Desde el punto de vista matemático, el mensaje es claro: lejos de "*desmontar*", aporta razones extras para el desarrollo de la teoría de variedades; *el conjunto $\mathbb{R}^n$, considerado sin estructura topológica adicional, no "sabe" cuál es su dimensión. La dimensión aparece únicamente cuando se fija una topología.*

Aparte de la unicidad de la dimensión, la propiedad de ser *segundo contable* tiene otras consecuencias menos intuitivas, tales como la existencia de *particiones de la unidad* (véase [16]).

Ejemplo 2.10.66 (Abierto)**.** Dada una variedad topológica M, todo abierto U de M es también una variedad topológica con la misma dimensión que M (ejercicio 2.9). $\diamondsuit$

El estudio de variedades topológicas es un campo muy amplio en matemáticas (véanse [17,20] para un análisis exhaustivo de este tema). Sin embargo, este libro está enfocado en las llamadas *variedades diferenciables*; un tipo especial de variedades topológicas en las que podemos extrapolar las herramientas clásicas del cálculo diferencial e integral. Por ende, se hace imprescindible establecer una definición rigurosa y coherente de *derivabilidad* de aplicaciones definidas en M.

Es fácil intuir que las variedades topológicas necesitan algo más de estructura para poder introducir el concepto de *derivada* de una forma consistente. Dada una variedad topológica M de dimensión n, la «*estructura de variedad topológica*» viene inducida por una familia de homeomorfismos $\left\{\varphi_{U_\alpha} : U_\alpha \to \widehat{U}_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$, de modo que M puede entenderse como un recubrimiento formado por una colección de «*parches*» (U_α), cada uno de los cuales se «*endereza*» (se transforma en un abierto $\widehat{U}_\alpha$ de $\mathbb{K}^n$) mediante el homeomorfismo φ_{U_α}. Por ello, cabría esperar que cualquier definición de diferenciabilidad sobre M se preservara por los homeomorfismos locales φ_{U_α}, es decir, que, dada una *función diferenciable* $f : M \to \mathbb{R}$ y un homeomorfismo $\varphi_{U_\alpha} : U_\alpha \to \widehat{U}_\alpha$, la composición $f \circ \varphi_{U_\alpha}^{-1} : \widehat{U}_\alpha \to \mathbb{R}$ también fuese diferenciable. Sin embargo, esto nos llevaría al hecho contradictorio de que esta noción de diferenciabilidad es *invariante bajo la acción de homeomorfismos.*

En este momento, sería prudente hacer una pausa en la lectura y dedicar un momento a la reflexión sobre el problema planteado.

Si se desafiara al lector a formular, por sí mismo, una definición de variedad «diferenciable», ¿cómo enfrentaría este desafío? ¿Qué condiciones adicionales deberíamos incorporar a nuestra definición variedad topológica para permitir la aplicación del cálculo diferencial? Más específicamente, ¿qué ajustes deberíamos considerar en la definición de variedad topológica para ser capaces de determinar si una función definida sobre dicha variedad es «diferenciable»?

Dado un espacio topológico M, una ***carta local***, ***carta coordenada*** o simplemente ***carta*** sobre M vendrá dada por un par (U, φ_U), donde $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ es un homeomorfismo, con U un abierto de M y $\widehat{U}$ un abierto de $\mathbb{K}^n$. Si $x \in U$, diremos que la carta local está ***centrada en x*** o es una carta ***alrededor de x***. Al abierto U se le denomina ***entorno coordenado***. Cuando el dominio de la carta sea toda la variedad M, diremos que la carta es una ***carta global*** de M. Aunque no se usará mucho en este texto, el término ***parametrización de M alrededor de*** x hace referencia a las inversas de las cartas locales. Más específicamente, una parametrización de M alrededor de x se define como un homeomorfismo $f : \widehat{U} \to U$ de un abierto $\widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ en un abierto $U \subseteq M$.

En este punto es necesario aclarar cómo introducir la característica de «*diferenciabilidad*» en nuestra estructura de variedad. Dadas dos cartas locales (U, φ_U) y (V, ψ_V), con $U \cap V \neq \emptyset$, diremos que son ***diferenciablemente compatibles*** si se cumple que la composición $\varphi_U \circ \psi_V^{-1} : \psi_V(U \cap V) \to \varphi_U(U \cap V)$ es una aplicación diferenciable de un abierto $\psi_V(U \cap V)$ de $\mathbb{K}^n$ en otro abierto $\psi_V(U \cap V)$ de $\mathbb{K}^n$. A la composición $\varphi_U \circ \psi_V^{-1}$ se le llama ***cambio de cartas de*** ψ_V ***en*** φ_U o ***función de transición de*** ψ_V ***en*** φ_U. Generalmente, cuando no se haga mención al dominio y codominio de $\varphi_U \circ \psi_V^{-1}$, se asumirá que son $\psi_V(U \cap V)$ y $\varphi_U(U \cap V)$, respectivamente. Aunque el estudio de las estructuras $\mathscr{C}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, es interesante por sí mismo, en este libro nos enfocaremos en el estudio de estructuras $\mathscr{C}^\infty$, y utilizaremos el término *diferenciable* como sinónimo de $\mathscr{C}^\infty$. Cabe además preguntarse lo siguiente (ejercicio 2.10): **¿Es la propiedad de «*diferenciablemente equivalente*» una relación de equivalencia?**

Se llamará ***atlas*** a cualquier colección $\mathcal{A}$ de cartas locales cuyos dominios cubran M. Si todas las cartas son diferenciablemente compatibles entre sí, diremos que $\mathcal{A}$ es un ***atlas diferenciable***. Un atlas diferenciable se dice ***maximal*** si no está contenido en ningún otro atlas diferenciable.

Definición 2.10.67 (Variedad diferenciable)**.** *Sea M un espacio topológico Hausdorff y segundo contable. Una* **estructura diferenciable sobre** *M viene dada por un atlas diferenciable maximal sobre M. Una* **variedad diferenciable de dimensión** *n es un par $(M, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una estructura diferenciable sobre la variedad M, de tal manera que los codominios de las cartas locales de $\mathcal{A}$ son abiertos de $\mathbb{K}^n$. Diremos que M* **tiene estructura de variedad diferenciable** *si existe una estructura diferenciable sobre M.*

Si bien la definición de variedad diferenciable implica la existencia de un *atlas maximal*, uno puede intuir que se puede dar una definición equivalente, con la misma filosofía con la que se definen las variedades topológicas (definición 2.10.57), es decir, la variedad puede ser recubierta por cierto tipo de cartas locales.

Proposición 2.10.68. *Sea M una variedad topológica. Todo atlas diferenciable $\mathcal{A}$ determina una única estructura diferenciable sobre M, llamada* **estructura diferenciable inducida por** *$\mathcal{A}$. Dos atlas diferenciables $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ inducen la misma estructura diferenciable si y solo si la unión $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas diferenciable.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un atlas diferenciable sobre M. Denotemos por $\overline{\mathcal{A}}$ al *conjunto de todas las cartas locales sobre M que son diferenciablemente compatibles con las cartas contenidas en $\mathcal{A}$*. Observemos que $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Por otro lado, para probar que $\overline{\mathcal{A}}$ es un atlas diferenciable únicamente tenemos que probar que las cartas locales contenidas en $\overline{\mathcal{A}}$ son diferenciablemente compatibles entre sí. Sean $\varphi_U : U \to \widehat{U}$ y $\psi_V : V \to \widehat{V}$ dos cartas locales contenidas en $\overline{\mathcal{A}}$ con $U \cap V \neq \emptyset$. Si $x \in U \cap V$, dado que las cartas contenidas en $\mathcal{A}$ cubren todo M, existe al menos una carta local, $\phi : W \to \overline{W}$, en $\mathcal{A}$ tal que $x \in W$. Además, por construcción de $\overline{\mathcal{A}}$, las aplicaciones

$\varphi_U \circ \phi^{-1}$ y $\phi \circ \psi_V^{-1}$ son diferenciables. Entonces,

$$\left[(\varphi_U \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi_V^{-1})\right]\big|_{U \cap V \cap W} = \left[\varphi_U \circ \psi_V^{-1}\right]\big|_{U \cap V \cap W} .$$

Así, dado que $x \in U \cap V \cap W$, se deduce que $\varphi_U \circ \psi_V^{-1}$ es diferenciable en x. Luego, $\overline{\mathcal{A}}$ es un atlas diferenciable que contiene a $\mathcal{A}$. Es fácil comprobar que $\overline{\mathcal{A}}$ es maximal y, por ello, una estructura diferenciable sobre M. En efecto, si $\overline{\mathcal{A}}$ no fuera maximal entonces habría un atlas maximal $\tilde{\mathcal{A}} \supsetneq \overline{\mathcal{A}}$, por lo que habría al menos una carta $\varphi \in \tilde{\mathcal{A}}$ con $\varphi \notin \overline{\mathcal{A}}$. Es decir, habría una carta en $\tilde{\mathcal{A}}$ que no sería diferenciablemente compatible con alguna carta de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, habría dos cartas de $\tilde{\mathcal{A}}$ no diferenciablemente compatibles entre sí, por lo que $\tilde{\mathcal{A}}$ no es un atlas diferenciable.

Tomemos otra estructura diferenciable $\hat{\mathcal{A}}$ que contenga a $\mathcal{A}$. Entonces, todas las cartas de $\hat{\mathcal{A}}$ son diferenciablemente compatibles con las cartas de $\mathcal{A}$, lo que implica que

$$\hat{\mathcal{A}} \subseteq \overline{\mathcal{A}} .$$

Por maximalidad de $\hat{\mathcal{A}}$, tenemos que $\hat{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}$, de modo que $\overline{\mathcal{A}}$ es la única estructura diferenciable determinada por $\mathcal{A}$.

Tomemos ahora dos atlas diferenciables $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, cuyas estructuras diferenciables inducidas vienen dadas por $\overline{\mathcal{A}}$ y $\overline{\mathcal{A}}'$, respectivamente. Entonces, $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}'$ si y solo si el conjunto de cartas locales compatibles con las cartas de $\mathcal{A}$, es igual al conjunto de cartas locales compatibles con las cartas de $\mathcal{A}'$. En otras palabras, $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}'$ si y solo si toda carta local compatible con $\mathcal{A}$ lo es también con $\mathcal{A}'$, y viceversa. En particular, las cartas contenidas en $\mathcal{A}$ son compatibles con las cartas contenidas en $\mathcal{A}'$, y recíprocamente. Es decir, la unión $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas diferenciable. Veamos el recíproco. Si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas diferenciable, entonces, por maximalidad, la estructura diferenciable inducida $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'}$ satisface que

$$\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'} = \overline{\mathcal{A}}'$$

□

Es importante señalar no solo el resultado, sino también la prueba. Dado que esta demostración es *constructiva*, la información que aporta esta proposición no se reduce únicamente al hecho de que todo atlas induce una única estructura diferenciable. De hecho, se afirma que *la estructura diferenciable inducida por un atlas viene dada por la colección de todas las cartas locales en la variedad que son diferenciablemente compatibles con las cartas del atlas.* Notemos que esta afirmación, además, facilita la construcción de estructuras diferenciables. En particular, únicamente necesitaríamos recubrir nuestra variedad por cartas locales que sean diferenciablemente compatibles para probar que una variedad tiene estructura diferenciable y, además, fijar su estructura. Así, esencialmente, una variedad diferenciable es una variedad topológica en la que el recubrimiento por cartas locales satisface la propiedad de compatibilidad diferenciable. Generalmente, salvo que pueda existir alguna ambigüedad, llamaremos variedad diferenciable al espacio topológico M, evitando nombrar la estructura diferenciable $\mathcal{A}$ que se está fijando sobre M. Los ejemplos canónicos de variedad diferenciable de dimensión n son $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$ (ejercicio 2.11). **Podemos encontrar aquí el primer ejemplo de vídeo asociado a un código QR, que aporta una noción intuitiva de la noción de variedad diferenciable**.

Sea U un entorno coordenado de una carta local φ_U de M. Uno puede imaginar este entorno como una cuadrícula o enrejado, obtenido como preimagen de un enrejado en el abierto $\varphi_U(U) = \widehat{U}$ de $\mathbb{K}^n$ (figura 2.20). Esto aporta sentido a la noción de «*coordenadas locales*» inducidas por φ_U. Más específicamente, para cada punto $x \in U$, la imagen $\varphi_U(x) = \left(x^1(x), \ldots, x^n(x)\right)$ serán las ***coordenadas locales de*** x ***en*** $\widehat{U}$.

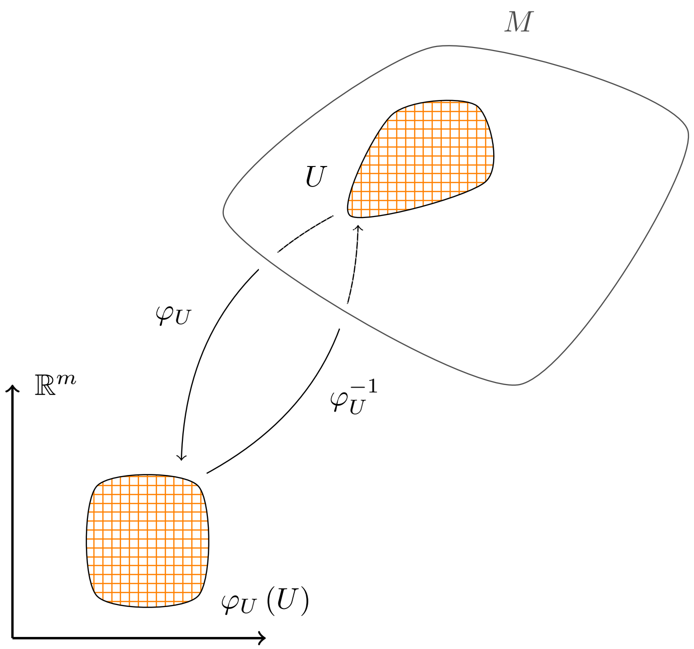


Figura 2.20: Coordenadas locales.

A lo largo del texto, usaremos la notación de $\varphi_U = \left(x^i\right)$ para hacer alusión a las **coordenadas locales** de la carta φ_U, o simplemente trataremos con coordenadas locales $\left(x^i\right)$, prescindiendo de hacer referencia explícita a la carta local que las induce.

Tanto para $\mathbb{R}^n$ (ejemplo 2.10.58) como para $\mathbb{H}^n$ (ejercicio 2.6), la identidad define coordenadas globales que, en ambos casos, se denotarán por $\left(r^i\right)$ y se llamarán ***coordenadas canónicas****; diferenciándose si se trata de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ dependiendo del* *contexto. En el caso de* $\mathbb{K}^1$ *la coordenada canónica se denotará por* t*, en* $\mathbb{K}^2$ *las coordenadas canónicas se denotarán por* (x, y)*, mientras que en* $\mathbb{K}^3$ *las coordenadas canónicas se denotarán por* (x, y, z)*, siguiendo la notación más popular para las coordenadas de estos espacios.*

Aunque no es un problema sencillo, y está muy lejos de los propósitos de este libro, es importante notar que existen variedades topológicas que no admiten estructura de variedad diferenciable. En 1960 se demostró por primera vez que existían este tipo de variedades topológicas utilizando un ejemplo en dimensión 10 [14]. Por otro lado, como se verá en el ejemplo 2.10.70, generalmente, la estructura diferenciable no tiene por qué ser única. Es decir, que *ni la existencia ni la unicidad están garantizadas en lo relativo a la construcción de estructuras diferenciables sobre variedades topológicas.*

Además, incluso aunque la estructura de variedad diferenciable esté fijada, hay cierta *libertad de elección* en lo relativo a las cartas locales que recubren nuestra variedad (proposición 2.10.68). Este hecho tiene tanto ventajas como inconvenientes. Por un lado, podemos escoger una familia recubridora de cartas locales que faciliten la resolución de un determinado problema (de la misma forma que en cálculo en varias variables se emplean coordenadas polares, esféricas o cilíndricas en base a la simetría de determinados problemas). Por otro lado, cuando se demuestra un resultado utilizando un sistema de cartas locales específico, y se pretende que este resultado sea «*global*» (válido en toda la variedad diferenciable), se deberá probar que es independiente de la elección de cartas locales, lo que puede resultar un problema complicado.

Es pertinente aclarar que las variedades diferenciables se utilizan para modelar ciertos conceptos físicos, por ejemplo, el espacio-tiempo en relatividad general. Desde un punto de vista físico, generalmente, esta independencia de la elección de cartas locales representa que las leyes de la naturaleza no pueden depender del observador que las esté midiendo, lo que se conoce como el *principio de equivalencia.*

Como ya hemos mencionado, todo abierto U (no vacío) de una variedad topológica M es una variedad topológica de la misma dimensión. Más aún, si M es variedad diferenciable entonces induce una estructura diferenciable en U, dada por la restricción de las cartas de M a U (ejercicio 2.12).

Ejemplo 2.10.69. Sea X un conjunto tal que existe una aplicación biyectiva $F : X \to \mathbb{K}^n$. Entonces, X es una variedad topológica homeomorfa a $\mathbb{K}^n$ a través de F (ejemplo 2.10.62). Dado que, al haber una única carta, la condición de ser *diferenciablemente compatible* es trivial, X es una variedad diferenciable de dimensión n. Así, análogamente, todo conjunto X de tal manera que existe una aplicación biyectiva de X a M puede ser dotado de estructura de variedad diferenciable *difeomorfa* a M.

Es importante señalar que esta manera de construir variedades diferenciables será bastante común, como se demuestra en los ejemplos $\mathbb{R}^n$ (véase también el ejemplo

2.10.70), $\mathbb{H}^n$, la *gráfica de una función* 2.10.83, o el *paraboloide* 2.10.90. $\diamondsuit$

Ejemplo 2.10.70. Consideremos la recta real $\mathbb{R}$. Dado un número natural impar k, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi_k(x) = x^k \end{array}$$

es un homeomorfismo. Así, uno puede inducir una estructura diferenciable por cada carta φ_k (ejercicio 2.13). En el ejemplo 2.10.58, estudiamos la estructura diferenciable usual de $\mathbb{R}$ (correspondiente a $k = 1$). Recordemos de nuevo que si nuestro atlas se compone de una única carta, la condición de ser *diferenciablemente compatible* resulta superflua (ejemplo 2.10.69).

Tomemos k y k' números naturales impares distintos. Entonces, la aplicación

$$\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}(x) = x^{\frac{k}{k'}}$$

no es diferenciable en $x = 0$. Consecuentemente, para cada k impar, *obtenemos una estructura de variedad diferenciable diferente.*

En otras palabras, con este ejemplo, *hemos obtenido un número infinito numerable de estructuras de variedad diferenciable diferentes para la recta real* $\mathbb{R}$. Obviamente, la estructura que da lugar al cálculo diferencial usual en $\mathbb{R}$ es la inducida por la identidad $\varphi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. $\diamondsuit$

En otro orden de cosas, resulta sencillo intuir que las nociones de *punto interior* y *punto frontera*, se pueden extrapolar a las variedades diferenciables. Sea M una variedad y $x \in M$. Se dice que x es un ***punto interior*** si existe una carta local $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{H}^n$, con $x \in U$, tal que

$$\varphi_U(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n .$$

Por otro lado, x se dice que es un ***punto frontera*** si existe una carta $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ tal que,

$$\varphi_U(x) \in \partial\mathbb{H}^n .$$

De esta manera, se definen la ***frontera de M*** o ***borde de M***, denotado por ∂M, y el ***interior de M***, denotado por $\mathring{M}$ o $\mathrm{Int}\, M$, como los conjuntos de todos los puntos frontera, e interior, respectivamente.

<u>*Es crucial detenerse en este punto para destacar un detalle significativo*</u>: ocurre algo curioso al definir las nociones de punto interior o frontera, que parece poner en peligro la coherencia de su definición. En los dos casos se requiere que la imagen de la carta local sea un conjunto abierto en $\mathbb{H}^n$. *¿Qué ocurre con aquellas cartas cuya imagen viene dada por un abierto de $\mathbb{R}^n$? ¿Cómo podríamos catalogar los puntos del*

dominio?

Asumamos, que existe una carta local $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, i.e., el codominio de la carta local φ_U es un abierto $\widehat{U}$ de $\mathbb{R}^n$, y consideremos un punto arbitrario $x \in U$. Entonces, podemos asumir que $\widehat{U}$ es un abierto precompacto que contiene a $\varphi_U(x)$ (en caso contrario podemos restringir la φ_U a un entorno abierto precompacto de x). De esta manera, se tiene que existe un $M_n > 0$ tal que

$$|y^n| < M_n,$$

para todo $y = (y^1, \ldots, y^n) \in \widehat{U}$. De modo que

$$x^n + M_n > 0.$$

Luego, considerando la traslación por $(0, \ldots, 0, M_n)$,

$$\tau_{(0,\ldots,0,M_n)}\left(y^1, \ldots, y^n\right) = \left(y^1, \ldots, y^n + M_n\right)$$

se tiene que

$$\tilde{U} = \tau_{(0,\ldots,0,M_n)}\left(\widehat{U}\right) \subset \mathring{\mathbb{H}}^n$$

Además, $\tilde{\varphi}_U = \tau_{(M_1,\ldots,M_n)} \circ \varphi_U : U \to \tilde{U}$ es un homeomorfismo. Dado que estamos componiendo con una traslación, $\tilde{\varphi}_U$ es diferenciablemente compatible con el resto de cartas del atlas y, por lo tanto, $\tilde{\varphi}_U : U \to \tilde{U} \subseteq \mathring{\mathbb{H}}^n$ es una carta local alrededor de x. Recíprocamente, $\mathring{\mathbb{H}}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, luego cualquier abierto de $\mathring{\mathbb{H}}^n$, es también un abierto de $\mathbb{R}^n$. Así, hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 2.10.71. *Sea M una variedad diferenciable, y $x \in M$. Existe una carta local φ_U alrededor de x cuyo codominio es un abierto de $\mathbb{R}^n$ si y solo si x es un punto interior de M.*

Corolario 2.10.72. *Un espacio topológico M es una variedad con borde vacío de dimensión n si y solo si M es Hausdorff, segundo contable y puede ser cubierta por los dominios de una familia de homeomorfismos $\left\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \widehat{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\right\}_{\alpha\in A}$ de tal manera que $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ es diferenciable para todo α y β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.*

Definición 2.10.73. *Sea M una variedad diferenciable. Se dice que M es una **variedad sin borde** si $\partial M = \emptyset$. En cualquier otro caso, se dice que M es **una variedad con borde**.*

De este modo, podemos afirmar que una variedad n-dimensional sin borde es un espacio topológico Hausdorff, segundo contable y localmente homeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Es decir, $\mathbb{R}^n$ supone el *espacio modelo* de las variedades sin borde. En otras palabras, *grosso modo*, quedan bien diferenciados los dos casos:

- **Variedades con borde:** Hausdorff, segundo contable, localmente homeomorfo a $\mathbb{H}^n$ y diferenciablemente compatible.

- **Variedades sin borde:** Hausdorff, segundo contable, localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y diferenciablemente compatible.

Así, mientras que las variedades sin borde serán espacios «*localmente como* $\mathbb{R}^n$», las variedades con borde serán entidades «*localmente como* $\mathbb{H}^n$». De este modo, cuando trabajemos con una variedad sin borde M, usualmente, una carta sobre M vendrá dada por un par (U, φ_U), donde $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo diferenciablemente compatible con la estructura diferenciable de la variedad. Cuando no tengamos información previa sobre el borde de la variedad, trabajaremos con cartas sobre $\mathbb{K}^n$.

Es, en este punto, pertinente aclarar ciertas observaciones sobre las definiciones incluidas en este libro, en comparación con otros textos clásicos (véase [16], por ejemplo):

- **Carta local:** En este texto, una carta local de una variedad diferenciable M viene dada por un par (U, φ_U), donde $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ es un homeomorfismo. No obstante, en muchos textos reconocidos, uno encontrará que una carta de una variedad diferenciable M con borde se define como un par (U, φ_U), donde $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ es un homeomorfismo (sea el borde vacío o no). En otras palabras, el codominio es, en cualquier caso, un abierto $\mathbb{H}^n$. La equivalencia entre ambas definiciones se fundamenta en la proposición 2.10.71.

  El motivo principal de que se tome $\mathbb{K}^n$ como codominio es que, en este caso, la mayor disponibilidad de cartas simplifica y aporta elegancia a muchas pruebas (el lector puede, por ejemplo, intentar definir una estructura diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$ considerando esta segunda forma de definir variedad con borde).

- **Variedad con borde:** En muchos textos, el lector podrá encontrar el concepto definido en este libro como *variedad con borde* (sea o no vacío el borde). No obstante, este texto se reserva esta noción únicamente para aquellas variedades cuyo borde es no vacío. Por otro lado, aunque aquí empleamos el término *variedades sin borde*, en la literatura es común que *variedad* o *variedad diferenciable* se utilicen, por defecto, para referirse al caso sin borde. Las variedades diferenciables sin borde constituyen un caso particularmente interesante y, de hecho, son más frecuentes y estudiadas que aquellas con borde. No obstante, el propósito de este texto es generalizar el cálculo diferencial e integral a variedades diferenciables en general, abordando resultados fundamentales como el *teorema de Stokes*, donde la presencia del borde es crucial. Por esta razón, carece de sentido reducirse únicamente a la noción de variedad diferenciable sin borde.

  De este modo, de ahora en adelante, utilizaremos el término *variedad* para referirnos a una variedad diferenciable (con o sin borde). Únicamente se hará mención al borde cuando sea necesario por el contexto.

Aun con el razonamiento presentado, pueden surgir dudas en relación con la consistencia de la definición: *¿podría ocurrir, por ejemplo, que un punto fuera frontera e interior al mismo tiempo?* Equivalentemente, para un punto x en la variedad, *¿pueden existir dos cartas locales como las anteriores, φ_U y ψ_V, de tal manera que $\varphi_U(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$ y $\psi_V(x) \in \partial\mathbb{H}^n$?*

Teorema 2.10.74 (Invariancia topológica)**.** *Sea M una variedad topológica. Entonces, cada punto de M es o bien punto frontera, o bien punto interior, pero no ambos. Dicho de otro modo,*

$$M = \mathring{M} \sqcup \partial M\,.$$

Demostración. Sea $x \in M$ un punto arbitrario de la variedad. Supongamos que existen dos cartas, (U, φ_U) y (V, ψ_V) alrededor de x tales que

$$\varphi_U(x) \in \partial\mathbb{H}^n\,, \quad \psi_V(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n\,.$$

Observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos tomar ambas cartas sobre el mismo dominio W, de tal manera que $\psi_V(W) \subseteq \mathring{\mathbb{H}}^n$. En efecto, sea $\tilde{W} = U \cap V$. Si $\psi_V\left(\tilde{W}\right) \subseteq \mathring{\mathbb{H}}^n$, basta restringir ambas cartas a $W = \tilde{W}$, y tomar (W, φ_W) y (W, ψ_W), donde $\varphi_W = \varphi_U|_W$ y $\psi_W = \psi_V|_W$ (cuando restringimos una aplicación, también restringimos su imagen para que siga siendo un homeomorfismo). Si, por el contrario, $\psi_V\left(\tilde{W}\right) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$, tomamos

$$W = \psi_V^{-1}\left(\psi_V\left(\tilde{W}\right) \setminus \partial\mathbb{H}^n\right)\,.$$

Notemos que

$$\psi_V\left(\tilde{W}\right) \setminus \partial\mathbb{H}^n = (\partial\mathbb{H}^n)^c \cap \psi_V\left(\tilde{W}\right) = \mathring{\mathbb{H}}^n \cap \psi_V\left(\tilde{W}\right)\,,$$

Luego, $\psi_V\left(\tilde{W}\right) \setminus \partial\mathbb{H}^n$ es un abierto en $\mathbb{H}^n$, cuya intersección con $\partial\mathbb{H}^n$ es vacío. En otras palabras, $\psi_V(W) \setminus \partial\mathbb{H}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ contenido en $\mathring{\mathbb{H}}^n$. Por lo tanto, W es un subconjunto abierto de $\tilde{W}$, y basta, nuevamente, con restringir ambas cartas a W.

Con esto, el cambio de cartas $f : \psi_W \circ \varphi_W^{-1} : \varphi_W(W) \to \psi_W(W)$, es un homeomorfismo de un abierto de $\mathbb{H}^n$ que contiene puntos frontera (topológica) de $\mathbb{H}^n$ a un abierto de $\mathbb{R}^n$ (que no tiene frontera). Esta afirmación contradice el teorema 2.10.18. □

En términos de cartas locales, podemos expresar este teorema de la siguiente manera:

Corolario 2.10.75. *Sea M una variedad topológica, y $x \in M$. Si existe una carta local $\varphi_U : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ con $x \in U$ tal que $\varphi_U(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$ (respectivamente, tal que $\varphi_U(x) \in \partial\mathbb{H}^n$), entonces cualquier otra carta $\psi_V : V \to \widehat{V} \subseteq \mathbb{H}^n$ con $x \in V$ satisface $\psi_V(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$ (respectivamente, $\psi_V(x) \in \partial\mathbb{H}^n$).*

Dado un abierto U de una variedad diferenciable M, el interior de U como variedad es $\mathring{U} = U \cap \mathring{M}$, y su borde es $\partial U = U \cap \partial M$ (ejercicio 2.14).

Proposición 2.10.76. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces, $\mathring{M}$ es un abierto de M, y ∂M es un cerrado con interior vacío.*

Demostración. Sea $x \in \mathring{M}$. Entonces, podemos asumir que existe una carta (U, φ_U) de M, con $x \in U$, de tal manera que $\varphi_U(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. En otras palabras, el abierto U de M satisface que $U \subseteq \mathring{M}$, de modo que $\mathring{M}$ es un abierto de M. Esto implica inmediatamente que ∂M es un cerrado de M, pues es el complementario de $\mathring{M}$ en M, esto es,

$$\partial M = M \setminus \mathring{M} \,.$$

Asumamos ahora que existe un abierto V de M contenido en ∂M. Sea (U, φ) una carta alrededor de un punto $x \in V$. Entonces, la restricción $(W = U \cap V, \varphi|_W)$ es una carta local de M cuya imagen está totalmente contenida en $\partial \mathbb{H}^n$, lo que resulta en un absurdo. Concluimos que ∂M no puede contener abiertos de M, luego su interior (en M) es vacío. $\square$

Teorema 2.10.77. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con $\partial M \neq \emptyset$. Entonces, $\mathring{M}$ es una variedad sin borde de dimensión n, y ∂M es una variedad sin borde de dimensión $n-1$.*

Demostración. Tomemos un recubrimiento de M por cartas locales $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Utilizando la proposición 2.10.76 tenemos que, para cada $\alpha \in A$, la intersección $\mathring{M} \cap U_\alpha$ es un abierto en M. De este modo, la colección $\left\{ \left(\mathring{M} \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{\mathring{M} \cap U_\alpha} \right) \right\}_{\alpha \in A}$ (al considerar $\varphi_\alpha|_{\mathring{M} \cap U_\alpha}$, asumimos que se restringe también el codominio a su imagen) supone un recubrimiento de $\mathring{M}$ por cartas locales. Además, por el teorema de invariancia topológica (definición 2.10.74), se puede considerar que la imagen de todas estas cartas son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y, así, M es una variedad sin borde de dimensión n.

Consideremos, por otro lado, la colección $\left\{ \left(\partial M \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{\partial M \cap U_\alpha} \right) \right\}_{\alpha \in A}$. De nuevo, por el teorema de invariancia topológica, las imágenes de las aplicaciones $\varphi_\alpha|_{\partial M \cap U_\alpha}$ están contenidas en $\partial \mathbb{H}^n$. Por otro lado, es trivial comprobar que $\partial \mathbb{H}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$, con la topología subespacio, donde el homeomorfismo es la proyección p en las $n-1$ primeras coordenadas. Luego, como consecuencia, se tiene que la composición

$$\psi_\alpha = p|_{\varphi_\alpha(\partial M \cap U_\alpha)} \circ \varphi_\alpha|_{\partial M \cap U_\alpha} : \partial M \cap U_\alpha \to \mathbb{R}^{n-1} \tag{2.1}$$

es un homeomorfismo sobre su imagen. La familia $\{(\partial M \cap U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ induce un atlas diferenciable sobre ∂M, que convierte a ∂M en una variedad diferenciable sin borde de dimensión $n-1$. $\square$

Observemos que, en caso de que M sea una variedad sin borde, se tiene que $\mathring{M} = M$ y $\partial M = \emptyset$ y, por lo tanto, este teorema carece de sentido. Notemos que, como suele ser común, este teorema aporta más información en la demostración de la que se presenta en el enunciado. De hecho, no solo prueba que $\mathring{M}$ y ∂M son variedades sin borde, sino que se especifica como es la estructura diferenciable en cada caso. Por un lado, para $\mathring{M}$ no tenemos más que restringir las cartas a este conjunto, i.e., las coordenadas de los puntos interiores serán exactamente las mismas con respecto a ambas estructuras (la de M y la de $\mathring{M}$).

Por otro lado, sea $\big(U, \big(x^1, \ldots, x^n\big)\big)$ una carta local de M alrededor de un punto de la frontera $x \in \partial M$. Entonces, en base a la ecuación (2.1), las coordenadas locales inducidas por φ_U sobre ∂M son $\big(U \cap \partial M, x^1, \ldots, x^{n-1}\big)$. En otras palabras, grosso modo, estamos eliminando la última coordenada.

Hemos probado así un resultado que concuerda bastante bien con la imagen geométrica que tenemos de una variedad con borde: toda variedad diferenciable de este tipo se separa en su interior, que es una variedad sin borde de la misma dimensión, y su frontera, que es una variedad sin borde de una dimensión menos (véase la figura 2.21).

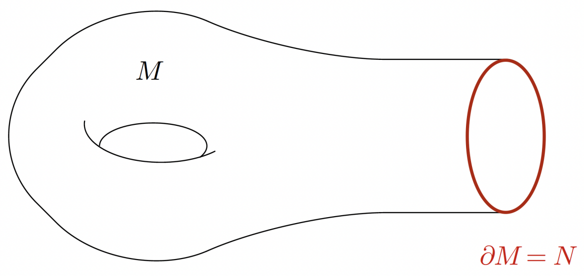


Figura 2.21: Variedad M con borde ∂M.

Resulta interesante destacar que este tipo de «*división*» en variedades más pequeñas que, desde cierto punto de vista, mantienen una coherencia diferencial puede extenderse al concepto abstracto de *foliación*. Aunque la profundización en tal abstracción excede los propósitos del presente texto, a modo de analogía, podemos pensar que dar una foliación de una variedad de dimensión n corresponde a «*cortarla en lonchas*» de dimensión $m < n$, por ejemplo, podemos «cortar» un cilindro (de dimensión 2) en círculos (de dimensión 1).

1.3 Algunas propiedades topológicas

Sea M una variedad diferenciable. Entonces, por definición, M es Hausdorff, segundo contable y localmente homeomorfa a $\mathbb{K}^n$, de tal manera que las cartas que recubren M son diferenciablemente compatibles. Sin embargo, estas no son las únicas propiedades que comparten con los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$. En esta sección estudiaremos algunas de estas propiedades.

Sea $x \in M$ y una carta local $\varphi_U : U \to \widehat{U}$ con $x \in U$. Denotemos por $B_r^n(\varphi_U(x)) \subset \mathbb{R}^n$ a la bola abierta de centro $\varphi_U(x)$ y radio r. Hay dos situaciones posibles:

I) Si $\widehat{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, podemos considerar un $r > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que
$$B_r^n(\varphi_U(x)) \subseteq \widehat{U}\,.$$

II) Si $\widehat{U}$ es un abierto de $\mathbb{H}^n$ con intersección no vacía con el borde de $\mathbb{H}^n$, existe un $r > 0$ suficientemente pequeño tal que
$$B_r^n(\varphi_U(x)) \cap \mathbb{H}^n \subseteq \widehat{U}\,.$$

Ambas afirmaciones se pueden resumir en que existe un $r > 0$, suficientemente pequeño, cumpliendo que
$$B_r^n(\varphi_U(x)) \cap \mathbb{K}^n \subseteq \widehat{U}\,.$$
Tomemos $U_r = \varphi_U^{-1}(B_r^n(\varphi_U(x)) \cap \mathbb{K}^n)$, de modo que la restricción de φ_U a U_r,
$$\varphi_r : U_r \to B_r^n(\varphi_U(x)) \cap \mathbb{K}^n\,,$$
es de nuevo una carta local de M centrada en x. Observemos que $B_r^n(\varphi_U(x)) \cap \mathbb{K}^n$ es conexo por caminos y, por consiguiente, U_r también lo es; pues la conexidad por caminos se preserva por aplicaciones continuas en virtud de la proposición 2.10.42. Recubriendo M por este tipo de cartas locales, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.10.78. *Toda variedad diferenciable es localmente conexa y localmente conexa por caminos.*

Combinando esta proposición con el teorema 2.10.35 y el teorema 2.10.40, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.10.79. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces, M es conexa si y solo si es conexa por caminos.*

Es pertinente recordar que las nociones de *conexidad* y *conexidad por caminos* constituyen dos propiedades topológicas fundamentales que buscan formalizar la intuición de que un espacio está «*unificado*» o «*constituido de una sola pieza*». A pesar de que ambas propiedades persiguen encapsular la misma idea,

generalmente presentan diferencias significativas (véase el contraejemplo 2.10.36). No obstante, en variedades, los espacios topológicos específicos tratados en este texto, estas propiedades resultan ser equivalentes. Esta equivalencia facilita de manera considerable el análisis y la caracterización de dicha propiedad, al simplificar el estudio de la conexión sobre estos espacios.
Notemos que, de hecho, la definición 2.10.37 se puede mejorar en el caso de una variedad diferenciable. En particular, *toda variedad diferenciable es localmente conexa por caminos diferenciables.* Dicho de otro modo, todo punto tiene una base de entornos conexos caminos diferenciables, i.e., todo par de puntos se puede unir por un camino diferenciable.

Corolario 2.10.80. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces, M es conexa si y solo si dos puntos cualesquiera pueden unirse por un camino diferenciable a trozos.*

Recordemos que un camino es diferenciable a trozos si es diferenciable en todo punto salvo en un número finito de ellos.

Utilizando, de nuevo, entornos coordenados que provienen de antiimágenes de bolas abiertas intersecadas con $\mathbb{K}^n$, se puede probar otra similitud del comportamiento local de una variedad diferenciable con $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$.

Teorema 2.10.81. *Toda variedad diferenciable tiene una base numerable de entornos coordenados precompactos.*

Demostración. Sea M una variedad diferenciable. Dado que M es segundo contable, puede ser recubierta por un conjunto numerable de cartas locales (U_i, φ_i), con $i \in \mathbb{N}$.

Fijemos $i \in \mathbb{N}$, y su carta local asociada $\varphi_i : U_i \to \widehat{U}_i$. Tomemos la familia $\mathcal{B}$ de las intersecciones de bolas abiertas $B_r^n(x) \cap \mathbb{K}^n \subseteq \widehat{U}_i$ de radio r racional y centro x con coordenadas racionales. Observemos que $\mathcal{B}$ es numerable y cada uno de estos conjuntos es precompacto y, dado que φ_i es un homeomorfismo y M es Hausdorff, la antiimagen por φ_i de cada una de estas bolas es precompacta. Sea $\mathcal{B}_i$ la familia de todas las antiimágenes de cada uno de los conjuntos de $\mathcal{B}$ por φ_i. De nuevo, $\mathcal{B}_i$ es una familia numerable de entornos abiertos precompactos de M. Ahora bien, al considerar $B = \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_i$, obtenemos una base numerable de entornos coordenados precompactos. $\square$

Así, en particular, *para todo punto x de la variedad, existe un entorno coordenado precompacto de x.* Tomando la clausura de los entornos precompactos del teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.10.82. *Toda variedad diferenciable M es localmente compacta, es decir, todo punto x de M tiene un entorno compacto.*

Los hallazgos presentados ilustran un principio más amplio que, a primera vista, parece intuitivo: *las variedades diferenciables heredan las propiedades topológicas y locales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$.* Sin embargo, la exploración de propiedades topológicas menos obvias de las variedades diferenciables trasciende ampliamente el alcance de este texto. Aunque un análisis exhaustivo podría proveer una comprensión más profunda, existe el riesgo de desviar la atención del lector del objetivo central de esta obra: extender el cálculo diferencial e integral a las variedades. Para una indagación más profunda y especializada, se recomienda consultar el libro [16].

1.4 Ejemplos de variedades diferenciables

Aparte del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y del semiespacio superior cerrado n-dimensional $\mathbb{H}^n$ (véanse los ejemplos 2.10.58 y 2.10.70), se pueden encontrar muchos ejemplos de variedades diferenciables. Esta sección está dedicada en exclusivo a presentar y estudiar ejemplos de variedades diferenciables.

Ejemplo 2.10.83 (Gráfica de una función)**.** Un ejemplo fundamental de variedad diferenciable viene dado por la gráfica de una función. Sea M una variedad diferenciable y una función $f\colon M \to \mathbb{R}^k$, su ***gráfica*** es el subconjunto $\Gamma(f)$ de $M \times \mathbb{R}^k$ dado por

$$\Gamma(f) = \left\{(x, y) \in M \times \mathbb{R}^k \; : \quad y = f(x)\right\} .$$

La aplicación $\varphi\colon \Gamma(f) \ni (x, y) \mapsto x \in M$ define una aplicación biyectiva en $\Gamma(f)$. En efecto, su inversa está dada por $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$. Así, podemos dotar a $\Gamma(f)$ de estructura diferenciable de tal manera que φ es un difeomorfismo. Como consecuencia, la frontera $\partial\Gamma(f)$ y el interior $\Gamma(\mathring{f})$ de su gráfica $\Gamma(f)$ vienen dados por,

$$\begin{aligned} \partial\Gamma(f) &= \left\{(x, y) \in \partial M \times \mathbb{R}^k \; : \quad y = f(x)\right\} , \\ \Gamma(\mathring{f}) &= \left\{(x, y) \in \mathring{M} \times \mathbb{R}^k \; : \quad y = f(x)\right\} . \end{aligned}$$

Obtener estas expresiones se deja como ejercicio (ejercicio 2.15).

$\diamondsuit$

Dado que aún no conocemos una noción de «*función diferenciable*» que vaya mucho más allá de funciones definidas en cierto tipo de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, no podemos extrapolar este ejemplo. No obstante, podría ser beneficioso para el lector plantearse la siguiente cuestión en este punto de la discusión:

Considera f definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. ¿Qué transcendencia puede tener el hecho de que f no sea, necesariamente, «diferenciable»? ¿Qué diferencia puedde encontrar con el caso en el que la función f no es diferenciable?

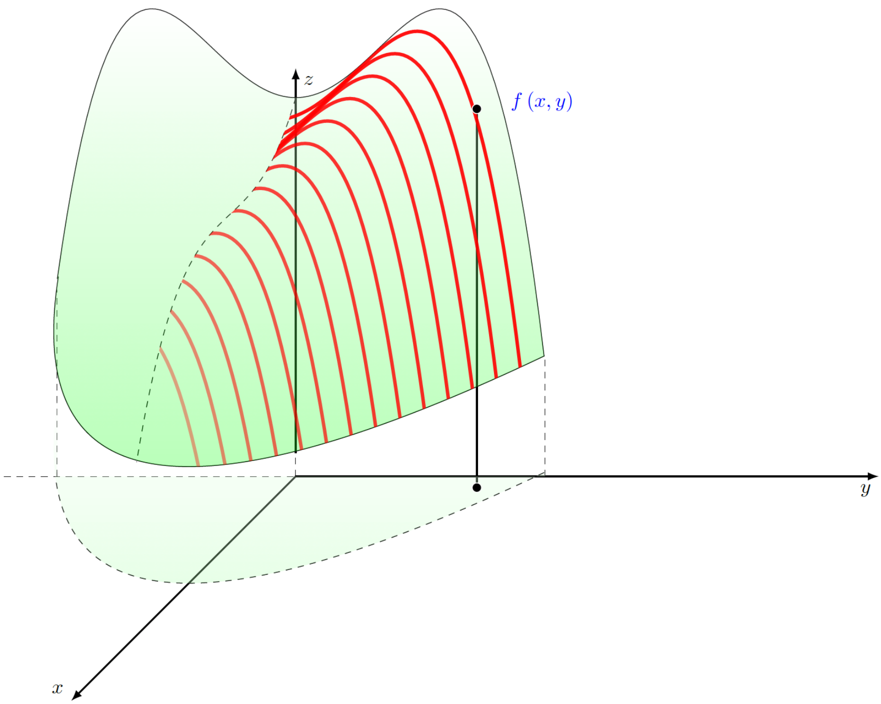


Figura 2.22: Gráfica de una función.

Ejemplo 2.10.84 (La n-esfera)**.** Se llama n-esfera de radio 1 y centro 0 al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon ||x|| = 1\right\} ,$$

donde $||\cdot||$ denota la norma euclídea. Con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$, la n-esfera es un espacio topológico Hausdorff y segundo contable. Así, finalmente, debemos comprobar que es localmente euclídea. Para ello basta encontrar homeomorfismos locales a $\mathbb{R}^n$ diferenciablemente compatibles entre sí (véase el corolario 2.10.72). Consideremos los abiertos de $\mathbb{R}^{n+1}$ dados por

$$U_i^+ = \left\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x^i > 0\right\} ,$$

y

$$U_i^- = \left\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x^i < 0\right\} ,$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Sea $f \colon B_1^n(0) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(y) = \sqrt{1 - ||y||^2}$, donde

$$B_1^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| < 1\} ,$$

denota la bola abierta de radio 1 centrada en el origen. Reordenando las componentes de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, podemos identificar a $U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$ con la gráfica de la función

$$x^i = f\left(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}\right) ,$$

donde $\hat{x}^i$ denota la omisión de x^i, y, análogamente, podemos identificar a $U_i^- \cap \mathbb{S}^n$ con la gráfica de la función

$$x^i = -f\left(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}\right) .$$

Por tanto, utilizando el resultado del ejemplo anterior, podemos ver que cada subconjunto $U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$ o $U_i^- \cap \mathbb{S}^n$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, y que las aplicaciones $\varphi^\pm \colon U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n \to B_1^n(0)$ dadas por

$$\varphi_i^\pm\left(x^1, \dots, x^{n+1}\right) = \left(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}\right)$$

son cartas de $\mathbb{S}^n$, con inversas

$$\left(\varphi_i^\pm\right)^{-1}\left(y^1, \dots, y^n\right) = \left(y^1, \dots, y^{i-1}, \pm f\left(y^1, \dots, y^n\right), y^i, \dots, y^n\right) .$$

Es fácil ver que

$$\mathbb{S}^n \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U_i^+ \cup U_i^-\right) = \mathbb{S}^n$$

De hecho, uno puede imaginar este recubrimiento por abiertos de $\mathbb{S}^n$ como un recubrimiento de la esfera por «*casquetes*» abiertos colocados en cada uno de los puntos cuyas coordenadas son todas iguales a 0, menos una igual a ± 1. De este modo se tiene que

$$\mathcal{A} = \left\{\left(U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n, \varphi_i^\pm\right)\right\}_{i \in \{1, \dots, n+1\}}$$

es un atlas de $\mathbb{S}^n$. Veamos ahora que $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable. Para ello, debemos comprobar que las funciones de transición son diferenciables. En efecto, tenemos

$$\varphi_i^\pm \circ \left(\varphi_j^\pm\right)^{-1}(y) = \begin{cases} \left(y^1, \dots, \hat{y}^i, \dots, \pm\sqrt{1 - ||y||^2}, \dots, y^n\right), & \text{si } i < j\,, \\ \\ \left(y^1, \dots, \pm\sqrt{1 - ||y||^2}, \dots, \hat{y}^i, \dots, y^n\right), & \text{si } i > j\,, \end{cases}$$

donde las raíces cuadradas ocupan las posiciones j-ésimas, y su signo «+» o «−» corresponde al de $\left(\varphi_j^\pm\right)^{-1}$. Concluimos que el atlas $\mathcal{A}$ es diferenciable, y por ende dota a la esfera de una estructura diferenciable de variedad sin borde de dimensión n, llamada estructura diferenciable estándar.

En el caso especial de la esfera, se conocen muchas maneras de recubrirla por cartas locales que inducen la misma estructura diferenciable. Otro atlas viene dado por la llamada ***proyección estereográfica***. Sean $\psi^+ : \mathbb{S}^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ y $\psi^- : \mathbb{S}^n \setminus \{(0,\dots,0,-1)\} \to \mathbb{R}^n$ las aplicaciones dadas por

$$\psi^+\left(x^1,\dots,x^{n+1}\right) = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}},\dots,\frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right), \tag{2.2}$$

y $\psi^-(x) = -\psi^+(-x)$. Podemos comprobar que son biyecciones. De hecho, las inversas de $\psi^\pm$ vienen dadas por

$$\left(\psi^\pm\right)^{-1}\left(y^1,\dots,y^n\right) = \frac{1}{||y||^2+1}\left(2y^1,\dots,2y^n,\pm(||y||^2-1)\right) .$$

Las funciones de transición vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\psi^- \circ \left(\psi^+\right)^{-1}\left(y^1,\dots,y^n\right) &= \psi^-\left(\frac{2y^1}{||y||^2+1},\dots,\frac{2y^n}{||y||^2+1},\frac{||y||^2-1}{||y||^2+1}\right)\\
&= -\frac{1}{1+\frac{||y||^2-1}{||y||^2+1}}\left(-\frac{2y^1}{||y||^2+1},\dots,-\frac{2y^n}{||y||^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{||y||^2}\left(y^1,\dots,y^n\right) ,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\psi^+ \circ \left(\psi^-\right)^{-1}\left(y^1,\dots,y^n\right) &= \psi^+\left(\frac{2y^1}{||y||^2+1},\dots,\frac{2y^n}{||y||^2+1},\frac{-(||y||^2-1)}{||y||^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{1-\frac{-(||y||^2-1)}{||y||^2+1}}\left(\frac{2y^1}{||y||^2-1},\dots,\frac{2y^n}{||y||^2-1}\right)\\
&= \frac{1}{||y||^2}\left(y^1,\dots,y^n\right) .
\end{aligned}$$

La carta ψ^+ (respectivamente, ψ^-) cubre toda la esfera salvo el polo norte (respectivamente, sur).

Aparte de estos dos recubrimientos de la esfera, aún existen otros bastante reconocidos. Se deja al lector probar con las conocidas como *coordenadas esféricas* para obtener otro recubrimiento de la esfera por cartas que, de nuevo, inducen la misma estructura diferenciable.

$\diamondsuit$

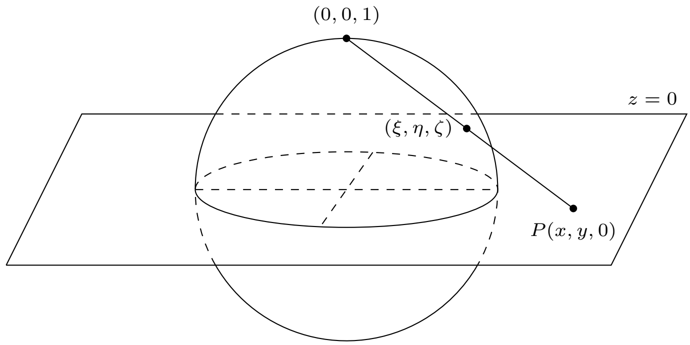


Figura 2.23: Proyección estereográfica para $\mathbb{S}^2$ del hemisferio norte en el plano $z = 0$.

Ejemplo 2.10.85 (La bola)**.** Denotemos por $\bar{B}_1^n(0)$ a la bola cerrada con centro en el origen y radio unidad en $\mathbb{R}^n$, esto es,

$$\bar{B}_1^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| \leq 1\} \, .$$

De nuevo, con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^n$, es un espacio topológico Hausdorff y segundo contable. Claramente, el interior de $\bar{B}_1^n(0)$ <u>como espacio topológico</u> es $B_1^n(0)$, la bola abierta con centro en el origen y radio unidad en $\mathbb{R}^n$, y la frontera es $\partial\bar{B}_1^n(0) = \mathbb{S}^{n-1}$.

Para construir el atlas de la bola, vamos a utilizar una estrategia similar a la de la esfera. Sea $f\colon B_1^{n-1}(0) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(y) = \sqrt{1 - ||y||^2}$. Consideremos, por otro lado, los abiertos en $\bar{B}_1^n(0)$ dados por

$$B_i^+ = U_i^+ \cap \bar{B}_1^n(0) \, , \quad B_i^- = U_i^- \cap \bar{B}_1^n(0) \, ,$$

con U_i^+ y U_i^- definidos en el ejemplo 2.10.84. Podemos escribir la bola como

$$\bar{B}_1^n(0) = \left\{(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;:\; (x^i)^2 \leq \left(f(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^n)\right)^2\right\} \, ,$$

para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, de modo que

$$B_i^+ = \left\{(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;:\; 0 < x^i \leq f(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^n)\right\} \, ,$$

y

$$B_i^- = \left\{(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;:\; 0 < -x^i \leq f(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^n)\right\} \, .$$

Consideremos las aplicaciones $\varphi_i^\pm\colon B_i^\pm \to \mathbb{H}^n$, dadas por

$$\varphi_i^\pm\left(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n\right) = \left(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^n, f\left(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^n\right) \mp x^i\right) .$$

Por como hemos escrito $B_i^\pm$ arriba, está claro que las imágenes de $\varphi^\pm$ están contenidas en $\mathbb{H}^n$. Las aplicaciones $\varphi_i^\pm$ son biyecciones entre $B_i^\pm$ y $\varphi_i^\pm(U_i^\pm)$, y sus inversas están dadas por

$$\left(\varphi_i^\pm\right)^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = \left(y^1, \ldots y^{i-1}, \pm f(y^1, \ldots, y^{n-1}) \mp y^n, y^i, \ldots, y^{n-1}\right) .$$

Está claro que las aplicaciones y sus inversas son continuas (pues la topología es la de subespacio de $\mathbb{R}^n$), luego son homeomorfismos. Comprobar que las funciones de transición son diferenciables se deja como ejercicio al lector (ejercicio 2.19). Concluimos que $\{(U_i, \varphi_i^{\pm})\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ es un atlas diferenciable de la bola.

Notemos que

$$\begin{aligned} f\left(x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots,x^n\right) - x^i &= 0 \Leftrightarrow \\ \sqrt{1-||\left(x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots,x^n\right)||^2} &= x^i \Leftrightarrow \\ 1-||\left(x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots,x^n\right)||^2 &= \left(x^i\right)^2 \Leftrightarrow \\ ||\left(x^1,\ldots,x^n\right)||^2 &= 1 \end{aligned}$$

Esto implica que la frontera como variedad topológica coincide con la frontera como subconjunto de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\partial B_1^n(0) = \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces, $\mathring{B}_1^n(0) = B_1^n(0)$. $\diamondsuit$

Ejemplo 2.10.86 (Variedades de dimensión 0)**.** Sea $M = \{x_i\}_{i\in I\subseteq\mathbb{N}}$ un conjunto discreto de elementos. Podemos dotar a este conjunto de la topología discreta T_D (ejemplo 2.10.3). Con dicha topología, M es Hausdorff, pues, para cada par de puntos $x_i, x_j \in M$ con $x_i \neq x_j$, se tienen los abiertos disjuntos $\{x_i\}$ y $\{x_j\}$. Además, es segundo contable, ya que

$$\mathcal{B} = \Big\{\{x_i\} \,:\, i \in I \subseteq \mathbb{N}\Big\}$$

es una base de la topología. Observemos que $\mathbb{R}^0$ se puede identificar con un espacio vectorial de dimensión 0 y, por lo tanto, se entenderá que $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$. Por ello, los únicos abiertos de M homeomorfos a $\mathbb{R}^0$ son de la forma $\{x_i\}$ para algún $x_i \in M$. Además, para cada punto $x_i \in M$, existe una única aplicación $\varphi_i\colon \{x_i\} \to \mathbb{R}^0$. Por tanto, podemos tomar el atlas $\mathcal{A} = \{(\{x_i\}, \varphi_i)\}_{i\in I}$. Al no haber intersección entre los dominios de las cartas, este atlas es automáticamente diferenciable, luego M es una variedad diferenciable de dimensión 0. $\diamondsuit$

Uno podría ahora preguntarse por el recíproco: ¿Qué ocurre con una variedad diferenciable de dimensión 0? ¿Viene siempre dada por un conjunto numerable de elementos?

Ejemplo 2.10.87 (Variedades producto)**.** Dados dos espacios topológicos (X_1, T_1) y (X_2, T_2), podemos dotar al producto cartesiano $X_1 \times X_2$ de una topología conocida como ***topología producto*** (ejemplo 2.10.4), cuya base viene dada por productos de abiertos de X_1 y X_2, esto es,

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \,:\, U_1 \in T_1 \text{ y } U_2 \in T_2\}\ .$$

Por ejemplo, la topología estándar de $\mathbb{R}^2$ tiene como base productos de intervalos en $\mathbb{R}$. Además, en el ejercicio 2.4 se prueba que si X_1 y X_2 son

Hausdorff (respectivamente, segundo contables) entonces $X_1 \times X_2$ es Hausdorff (respectivamente, segundo contable).

Más aún, si M_1 es una variedad topológica sin borde de dimensión n y M_2 es una variedad topológica con borde de dimensión m podemos dotar a $M_1 \times M_2$ con estructura de variedad topológica con borde de dimensión $n+m$. Recordemos que, por ser variedad sin borde, M_1 es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (véase el corolario 2.10.72). Sean $U_1 \subseteq M_1$ y $U_2 \subseteq M_2$ subconjuntos abiertos y $\varphi_1 \colon U_1 \to \widehat{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2 \colon U_2 \to \widehat{U}_2 \subseteq \mathbb{K}^m$ homeomorfismos en sus imágenes. Por construcción, la aplicación

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : U_1 \times U_2 \ni (x, y) \mapsto \big(\varphi_1(x), \varphi_2(y)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}^m = \mathbb{K}^{n+m},$$

es un homeomorfismo de $U_1 \times U_2$ en su imagen, la cual es un abierto de $\mathbb{K}^{n+m}$. De esta forma, para cada par de cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) en M_1 y M_2, podemos construir una carta $(U_1 \times U_2, \varphi)$ en $M_1 \times M_2$.

Finalmente, si M_1 es una variedad diferenciable sin borde y M_2 es una variedad diferenciable con borde, podemos dotar a $M_1 \times M_2$ de una estructura diferenciable conocida como ***estructura diferenciable producto***.

Dadas dos cartas diferenciablemente compatibles $\varphi_1 \colon U_1 \to \mathbb{R}^n$ y $\psi_1 \colon V_1 \to \mathbb{R}^n$ en M_1 y dos cartas diferenciablemente compatibles $\varphi_2 \colon U_2 \to \mathbb{K}^m$ y $\psi_2 \colon V_2 \to \mathbb{K}^m$ en M_2, las cartas $\varphi \colon U_1 \times U_2 \to \mathbb{K}^{n+m}$ y $\psi \colon V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}^{n+m}$ que inducen en $M_1 \times M_2$ son diferenciablemente compatibles, pues

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{H}^m \ni (u, v) \mapsto \big(\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}(u), \psi_2 \circ \varphi_2^{-1}(v)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}^m\,.$$

Por último, $\partial\,(M_1 \times M_2) = M_1 \times \partial M_2$. En efecto, tomemos un punto $(x, y) \in \partial\,(M_1 \times M_2)$, una carta local $(U_1 \ni x, \varphi_1)$ de M_1, y una carta local $(U_2 \ni y, \varphi_2)$ de M_2. Consideremos la carta local $(U_1 \times U_2, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2))$ de $M_1 \times M_2$. Notemos que $\varphi\,(x, y) \in \partial\mathbb{K}^{n+m}$ (respectivamente, $\varphi\,(x, y) \in \operatorname{Int}\mathbb{K}^{n+m}$) si y solo si $\varphi_2\,(y) \in \partial\mathbb{K}^m$ (respectivamente, $\varphi_2\,(y) \in \operatorname{Int}\mathbb{K}^m$). Por ello, la frontera y el interior de $M_1 \times M_2$ están dados por

$$\partial(M_1 \times M_2) = M_1 \times \partial M_2\,, \quad \operatorname{Int}(M_1 \times M_2) = M_1 \times \operatorname{Int} M_2\,.$$

Cabe notar la importancia de que M_1 sea una variedad **sin borde**. En general, el producto de variedades con borde no es una variedad con borde. Por ejemplo, $\mathbb{H}^1$ es una variedad con borde de dimensión 1, pero el producto

$$\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\big\}$$

no lo es, ya que los entornos del punto frontera $(0, 0)$ son de la forma $[0, a) \times [0, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, los cuales no son abiertos en $\mathbb{H}^2$. Existe una noción más general que la de variedad con borde que encaja con este tipo de casos llamada ***variedad con esquinas***. Resulta natural extender los fundamentos del cálculo diferencial e integral a variedades con esquinas, dado que este marco permite abordar problemas tan elementales como el *cálculo del volumen de un cubo*. No obstante, en el cuerpo del presente texto nos centraremos exclusivamente en variedades con borde, reservando las variedades con esquinas al segundo apéndice de este texto. La razón de esta elección radica, en esencia, en que, si bien las variedades con esquinas no presentan diferencias conceptuales sustanciales con respecto a las variedades con borde, la formalización rigurosa de sus estructuras introduce complejidades técnicas que, lejos de aportar claridad, podrían desviar la atención del objetivo principal de nuestra exposición. $\diamondsuit$

En el caso de variedades sin borde, cualquier producto finito de las mismas es también una variedad diferenciable sin borde. Más generalmente, el producto finito de variedades con borde, de tal manera que únicamente la última de ellas tiene borde, es de nuevo una variedad con borde (véase el ejercicio 2.20).

Ejemplo 2.10.88 (El espacio proyectivo)**.** Recordemos primeramente la definición de espacio proyectivo. Consideremos la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dada por

$$x \sim y \quad \text{si} \quad y = rx \quad \text{para algún} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

El correspondiente conjunto de clases de equivalencia se conoce como espacio proyectivo de dimensión n y se denota por $\mathbb{RP}^n$. Sea $\pi \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{RP}^n$ la aplicación que a cada punto le asigna su clase de equivalencia. Se puede dotar a $\mathbb{RP}^n$ de la ***topología cociente***, que viene dada por la topología final (véase el definición 2.10.10) asociada a π. Así, un subconjunto $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ es abierto si y solo si su preimagen $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Esto hace que $\mathbb{RP}^n$ sea segundo contable (pues la preimagen de cada abierto de $\mathbb{RP}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, y hay una base contable para los abiertos de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$). Veamos que $\mathbb{RP}^n$ es Hausdorff. Para cada par de puntos $[x], [y] \in \mathbb{RP}^n$ con $[x] \neq [y]$ podemos considerar sendos representantes $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Considera la recta $R = \{rx \ : \ r \in \mathbb{R}\}$ y, dado que el espacio euclídeo es regular, podemos tomar un abierto precompacto $W \ni y$ de tal manera que,

$$0 \notin \overline{W}, \qquad R \cap \overline{W} = \emptyset$$

Sea d la distancia entre $\overline{W}$ y R. Dado que $\overline{W}$ es compacto y la función distancia es continua, existe un $y' \in \overline{W}$ tal que la distancia entre $\overline{W}$ y R es igual a la distancia entre y' y R. Tomemos ahora la recta $R' = \{ry' \ : \ r \in \mathbb{R}\}$. Teniendo en cuenta que R y R' se cortan en el 0 y no son coincidentes, la distancia d'' entre x y R' es positiva. Así, consideramos el entorno abierto de x dado por la bola $B^{n+1}_{d_x}(x)$, con $0 < d_x < d''$. Uno puede ahora comprobar que, efectivamente, $\pi\left(B^{n+1}_{d_x}(x)\right) \cap \pi\,(W) = \emptyset$ y, por lo tanto, $\mathbb{RP}^n$ es Hausdorff (véase figura 2.24).

Consideremos ahora los subconjuntos

$$U_i = \left\{[x^1, \ldots, x^{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \colon x^i \neq 0\right\}\,,$$

con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sus preimágenes,

$$\pi^{-1}(U_i) = \left\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \colon x^i \neq 0\right\}\,,$$

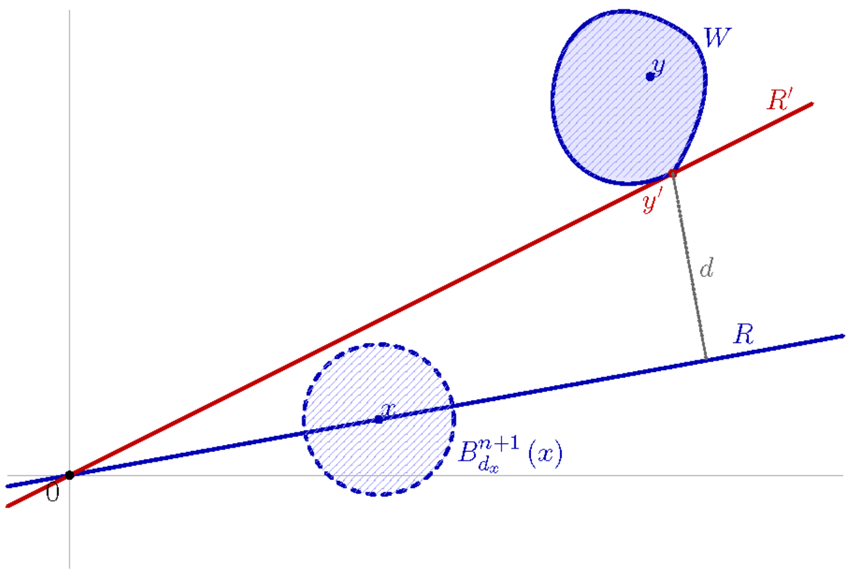


Figura 2.24: Visión intuitiva de la construcción de $B_{d_x}^{n+1}(x)$

son abiertas en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, de modo que los subconjuntos U_i son abiertos en $\mathbb{RP}^n$. Sean $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ las aplicaciones dadas por

$$\varphi_i\big([x^1, \dots, x^{n+1}]\big) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

Nótese que esta definición no depende del representante escogido en la clase de equivalencia $[x^1, \dots, x^{n+1}]$. Estas aplicaciones son homeomorfismos, pues son continuas y tienen inversas continuas dadas por

$$\varphi_i^{-1}(y^1, \dots, y^n) = [y^1, \dots, y^{i-1}, 1, y^i, \dots, y^n].$$

Si $i > j$, tenemos

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{y^j}, \dots, \frac{y^{j-1}}{y^j}, \frac{y^{j+1}}{y^j}, \dots, \frac{y^{i-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^i}{y^j}, \dots, \frac{y^n}{y^j}\right),$$

que es diferenciable en $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, y análogamente si $i < j$. Por tanto, el atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \{1, \dots, n+1\}}$ es diferenciable, y dota al espacio proyectivo de estructura de variedad diferenciable sin borde. ♢

Ejemplo 2.10.89 (El toro)**.** Se denomina n-toro a la variedad producto $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, con n copias de $\mathbb{S}^1$. En particular, podemos pensar en el 2-toro como la superficie de un dónut, de tal manera que la superficie del dónut D podemos representarla como,

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\} .$$

Es decir, la superficie de revolución obtenida rotando el círculo con centro $(2,0)$ y radio unidad en el plano xz, dado por la ecuación,

$$(x-2)^2 + z^2 = 1 \,,$$

alrededor del eje z. Por otra parte, el 2-toro está dado por

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ y } x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\} .$$

Consideremos la biyección,

$$\begin{aligned} \Phi \colon D &\to \mathbb{T}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2} - 2, z \right) , \end{aligned}$$

cuya inversa tiene la expresión,

$$\Phi^{-1} \colon (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto \big((2+x_3)x_1, (2+x_3)x_2, x_4 \big) .$$

Estas aplicaciones son restricciones de aplicaciones diferenciables entre $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, por lo que son diferenciables y Φ es un difeomorfismo. $\diamondsuit$

Uno puede, en este punto, razonar si el 2-toro debe ser, necesariamente, el producto de 2 circunferencias de *radio* 1. Más concretamente, dados $R, r > 0$, se puede definir

$$D_{r,R} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\sqrt{x^2+y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} .$$

¿Deberíamos poner alguna condición sobre los radios para que la figura resultante resulte ser una variedad diferenciable?

Ejemplo 2.10.90. Consideremos el espacio topológico $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2 \text{ y } z \geq 0\}$, con la topología heredada de $\mathbb{R}^3$ (figura 2.26).

Sea $\varphi \colon M \to \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por

$$\varphi\,(x,y,z) = (x,y) \,.$$

Tenemos que $\varphi(M) = \mathbb{R}^2$ y podemos escribir la inversa explícitamente como $\varphi^{-1}(x,y) = (x,y,\sqrt{x^2+y^2})$. Al ser una aplicación continua con inversa continua, φ es un homeomorfismo de M a $\mathbb{R}^2$. Por ser homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, el espacio M es una variedad topológica. Además, dado que (M,φ) es una carta global, es trivialmente diferenciable, pues no hay que comprobar que ningún cambio de cartas sea diferenciable, haciendo a M una variedad diferenciable. $\diamondsuit$

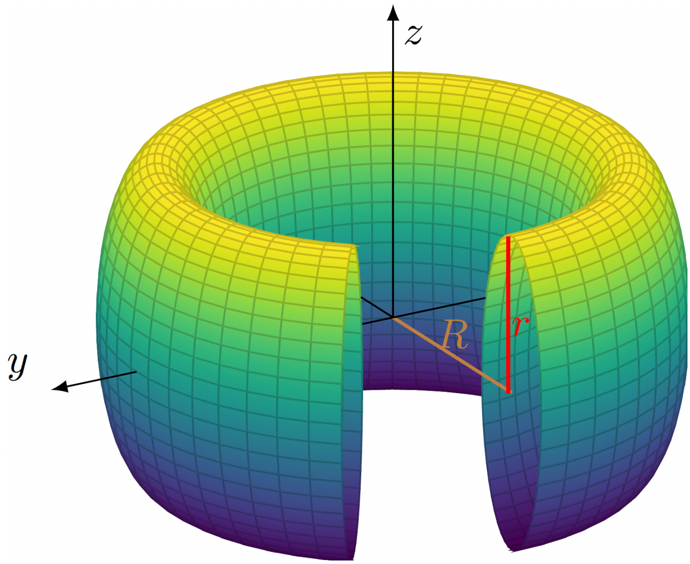


Figura 2.25: 2-toro de radios r y R.

Surge ahora, de manera natural, una cuestión similar a la que dio lugar el definición 2.10.83. Uno puede observar en la gráfica de M (figura 2.26) que parece haber cierta «pérdida de diferenciabilidad» en $z = 0$. Sin embargo, esto no es impedimento para que M tenga estructura diferenciable. ¿Qué está ocurriendo? ¿Cómo puede ser que M sea una variedad diferenciable si es evidente que hay problemas de diferenciabilidad en $z = 0$?
Consideremos, por otro lado, el conjunto

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^4 \text{ y } z \geq 0\}.$$

Se puede seguir un razonamiento similar al de M, para probar que N es una variedad diferenciable. Además, resulta sencillo intuir que este ejemplo no va a tener los mismos problemas de diferenciabilidad en $(0, 0, 0)$. ¿Qué ocurre en este caso? ¿En qué se diferencian?
La respuesta a esta pregunta tiene relación con el concepto de «subvariedad», aunque su tratamiento detallado se sale de los objetivos de este texto.

Ejemplo 2.10.91 (Espacios y grupos de matrices)**.** Denotemos por $\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$ al conjunto de matrices reales de m filas y n columnas. Se puede entonces definir la aplicación biyectiva $F : \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{nm}$,

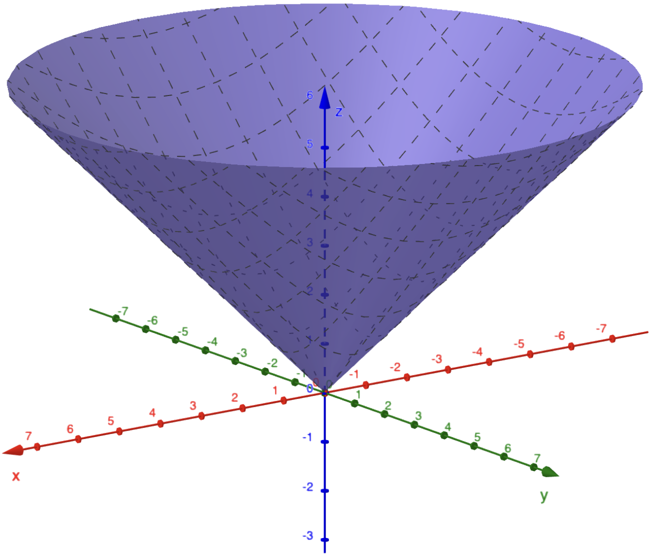


Figura 2.26: Cono positivo M.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{mn}), \qquad (2.3)$$

i.e., F «*coloca*» todas las filas ordenadas como un vector de tamaño mn. Así, utilizando el definición 2.10.69, podemos dotar a $\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$ de estructura diferenciable, de tal manera que es homeomorfa a $\mathbb{R}^{nm}$. Otra forma de entender este ejemplo es como caso particular del definición 2.10.59.

El ***grupo general lineal (real) de grado*** n, denotado por $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, es el subconjunto de $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ formado por las matrices invertibles. *Este subconjunto es, de hecho, un abierto en* $\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$. En efecto, notemos que la aplicación $\det : \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ se define como una combinación de sumas y productos de los coeficientes de las matrices y, por lo tanto, es continua (basta componer con F^{-1}). De este modo, $\mathrm{GL}(m \times n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, es un abierto en $\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$, luego hereda de este espacio la estructura diferenciable.

Por otra parte, cabe señalar que el conjunto $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ también tiene estructura de grupo. En efecto, está claro que contiene a la matriz identidad de dimensión n, y que, para cualesquiera matrices $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, tenemos que su producto AB y sus inversas A^{-1} y B^{-1} también están contenidas en $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. $\diamondsuit$

Este ejemplo ilustra un caso particular de lo que se conoce como un ***grupo de Lie***, que se define como un conjunto que posee simultáneamente la estructura de grupo y de variedad diferenciable, donde tanto la aplicación identidad como la inversa y el producto son diferenciables respecto a la estructura diferenciable de la variedad. Aunque el análisis exhaustivo de los grupos de Lie trasciende los objetivos específicos de esta asignatura, es importante que el lector los conozca, dada su relevancia en geometría diferencial, mecánica, análisis armónico, ingeniería, física de partículas y otros campos relacionados [16].

Ejemplo 2.10.92 (Espacios de configuración de sistemas mecánicos)**.** Si queremos caracterizar cómo se mueve una partícula puntual (esto es, un objeto sin volumen) en el espacio tridimensional podemos considerar que su posición se corresponde con un punto en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. En este sentido, para caracterizar la posición de un sistema de n partículas deberíamos dar un punto en $\mathbb{R}^{3n}$. Así, podemos representar la evolución del sistema a lo largo del tiempo por una curva en $\mathbb{R}^{3n}$:

$$q(t) = (q_{11}(t), q_{21}(t), q_{31}(t), \ldots, q_{1n}(t), q_{2n}(t), q_{3n}(t)),$$

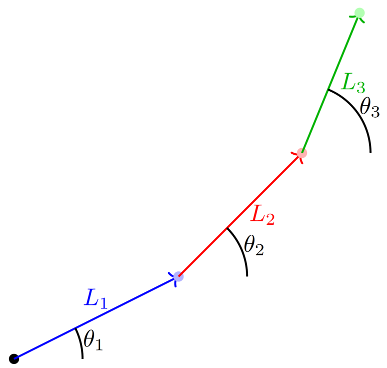
donde, para cada i, $(q_{1i}(t), q_{2i}(t), q_{3i}(t))$ representa la posición de la partícula i en el espacio en el instante t. El *conjunto de colisiones* es el subconjunto C de $\mathbb{R}^{3n}$ donde dos o más partículas ocupan la misma posición en el espacio:

$$C = \{q \in \mathbb{R}^{3n} \; : \; q_{ik} = q_{il} \text{ para algún } k \neq l, \; \forall i\}$$

De este modo, estaremos interesados únicamente en trabajar con el conjunto $Q = \mathbb{R}^{3n} - C$, que resulta ser un abierto de $\mathbb{R}^{3n}$. Al conjunto Q de posibles posiciones de nuestras partículas se le denomina ***espacio de configuración***. Es sencillo imaginar que si restringimos el movimiento de las partículas, nuestro espacio de configuración resultará algo más complejo y, de este modo, surge de manera natural, la estructura de variedad diferenciable como aplicación a sistemas mecánicos. De hecho, uno puede encontrar sistemas más complejos cuya configuración no se corresponde de forma natural y biyectiva con un punto del espacio euclídeo.

Por ejemplo, para caracterizar la posición de una rueda debemos especificar la posición de su centro (como un punto de $\mathbb{R}^3$), pero también el ángulo de giro con respecto a un punto de referencia en el borde de la rueda (el cual podemos identificar con un punto en el círculo unidad $\mathbb{S}^1$). Otro ejemplo paradigmático es el del péndulo de Foucault, cuya posición viene caracterizada por dos ángulos: uno con respecto al eje vertical y otro indicando su rotación en un plano paralelo al suelo. Cada uno de estos ángulos se puede identificar con el círculo unidad $\mathbb{S}^1$, de modo que el espacio de configuración del péndulo es el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. $\diamondsuit$

Ejemplo 2.10.93 (Péndulo articulado con ligaduras)**.** Consideremos un sistema mecánico formado por un péndulo con n articulaciones, cada una conectada mediante un brazo rígido de longitud fija. En ausencia de restricciones, el espacio de configuración de este sistema sería $\left(\mathbb{S}^1\right)^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots^{n)} \cdots \times \mathbb{S}^1$, donde cada ángulo θ_i representa la orientación del brazo i respecto a su eje de rotación.



Sin embargo, en muchos sistemas físicos reales, las articulaciones no pueden moverse libremente en todas las direcciones, de tal manera que, por ejemplo, algunas articulaciones podrían estar limitadas por topes mecánicos, o estar acopladas mediante rieles o guías.

Estas restricciones definen una variedad diferenciable M contenida en $\left(\mathbb{S}^1\right)^n$, que representa el espacio de configuración del sistema. Un ejemplo el movimiento de cada articulación está acoplado al anterior, y queda unívocamente determinado mediante un difeomorfismo, i.e.,

$$M = \left\{(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \left(\mathbb{S}^1\right)^n \ : \ f_i\left(\theta_i\right) = \theta_{i+1}, \text{ para } i = 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Veamos que M es una variedad diferenciable. Para empezar, podemos elegir θ_1 como parámetro libre (puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π). A partir de él, definimos recursivamente:

$$\theta_2 = f_1\left(\theta_1\right), \quad \theta_3 = f_2\left(\theta_2\right), \quad \ldots, \quad \theta_n = f_{n-1}\left(\theta_{n-1}\right).$$

Cada función f_i es diferenciable y, por tanto, alrededor de cada ángulo θ_1 se puede definir una función:

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \to M, \quad \theta_1 \mapsto (\theta_1, \overline{f}_1(\theta_1), \ldots, \overline{f}_n(\theta_1))$$

donde $\overline{f}_i = f_i \circ f_{i-1} \circ \cdots \circ f_1$. Es claro que eligiendo bien el intervalo abierto I, φ es una parametrización local de M. Así, podemos cubrir φ por parametrizaciones locales de este tipo. El hecho de que cada f_i sea un difeomorfismo implica directamente la compatibilidad diferenciable entre las cartas φ^{-1}.

Este tipo de modelos suele aparecer en robótica, biomecánica y física teórica, donde los sistemas articulados están sometidos a restricciones físicas que deben respetarse en el análisis geométrico y dinámico. ♢

Ejemplo 2.10.94 (Enrollamiento irracional del toro)**.** Recordemos que el toro de dimensión 2 se define como el producto de dos esferas,

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

Consideremos la *acción* de $\mathbb{Z}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ dada por traslaciones, i.e.,

$$(x, y) \mapsto (x + m, y + n), \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2.$$

Así, el espacio cociente cociente resultante de dicha acción,

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 := \big\{[(x, y)] \ : \ [(x, y)] := \big\{(x + m, y + n) \ : \ (m, n) \in \mathbb{Z}^2\big\}\big\}$$

En otras palabras, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es el conjunto que resulta de identificar puntos que difieren por un vector entero. Definamos la aplicación

$$\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,$$

por

$$\pi(x, y) = \left(e^{2\pi i x}, \ e^{2\pi i y}\right).$$

Notemos que en este punto estamos identificando $\mathbb{S}^1$ con su imagen por el difeomorfismo $(a, b) \mapsto a+ib$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}$. La aplicación π es claramente diferenciable, sobreyectiva y satisface la propiedad de ser $\mathbb{Z}^2$-*invariante*:

$$\pi(x + m, y + n) = \pi(x, y), \quad \forall(m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Por lo tanto, π induce una aplicación,

$$\overline{\pi} : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{T}^2,$$

dada por

$$\overline{\pi}\left([x, y]\right) = \left(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}\right),$$

Notemos que es sencillo comprobar que esta aplicación es, de hecho, biyectiva. Así, tomando la topología la inicial, se tiene que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es una variedad diferenciable difeomorfa a $\mathbb{T}^2$. Por esta razón, en la literatura es común identificar sin distinción al toro como el producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ o como el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Sea α un número irracional positivo, definimos la aplicación

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \qquad f(t) = [(t, \ \alpha t)].$$

Equivalentemente, en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,

$$f(t) = \left(e^{2\pi i t}, \ e^{2\pi i \alpha t}\right) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

Consideremos $M = f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tal que $f(t_1) = f(t_2)$ en $\mathbb{T}^2$. Así, existen dos enteros $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$t_1 - t_2 = m, \qquad \alpha\,(t_1 - t_2) = n.$$

De aquí se deduce $\alpha m = n$. Si α es irracional, la única posibilidad es $m = n = 0$, de modo que $t_1 = t_2$. Luego f *es inyectiva*. De modo que, de manera natural, *podemos* *construir una estructura de variedad diferenciables sobre M de tal manera que M es difeomorfa a $\mathbb{R}$ a través de f.*

Aunque especificaremos más adelante la noción de *diferenciabilidad* de una aplicación, uno puede intuir que f es una aplicación inyectiva y diferenciable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, puesto que lo es como aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^4$. Esto implica que esta variedad *incrustada* en el toro es, en cierto sentido, «*suave*».

Observemos, además, que la curva $\tilde{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{f}(t) = (t,\ \alpha t)$ tiene derivada $\tilde{f}'(t) = (1, \alpha)$, que tiene rango 1 para todo t (pues $(1, \alpha) \neq (0, 0)$). Por lo tanto la diferencial (más adelante *inducida tangente*, definición 2.10.107) de $\tilde{f}$ es inyectiva. Ahora bien, $\overline{\pi}^{-1} \circ \pi \circ \tilde{f} = f$, i.e., el rango sigue siendo 1 y, por lo tanto, se preserva la inyectividad. Denotemos a la proyección natural $\overline{\pi}^{-1} \circ \pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ por τ. Aunque no se busca ahondar en terminología, en la literatura a este tipo de aplicaciones se las conoce como *inmersiones*.

Probemos ahora la siguiente afirmación:

La imagen $M = f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es densa en $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Dado un punto $p = [(x_0, y_0)]$ y un entorno abierto U en $\mathbb{T}^2$, existe un $\epsilon > 0$ tal que el abierto $V = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$, tal que $p = [(x_0, y_0)] \in \tau(V) \subseteq U$.

Queremos encontrar $t \in \mathbb{R}$ y enteros $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(t, \alpha t) + (m, n) \in V.$$

Equivalentemente,

$$(t - m, \alpha t - n) \in V,$$

i.e.,

$$-\epsilon < t - m - x_0 < \epsilon, \quad -\epsilon < \alpha t - n - y_0 < \epsilon$$

Para todo $m \in \mathbb{Z}$, y $t \in \mathbb{R}$, denotamos,

$$\delta = t - m - x_0.$$

Para cada m, elegimos t tal que $\delta \in (-\epsilon, \epsilon)$. Así, basta encontrar $n, m \in \mathbb{Z}$ tal que,

$$-\epsilon < \alpha m + \alpha x_0 + \alpha\delta - n - y_0 < \epsilon$$

Definamos la parte fraccionaria de un número real x como,

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor,$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x. Entonces, tomamos n de tal manera que,

$$\lfloor \alpha(m + x_0 + \delta) - y_0 \rfloor = \alpha(m + x_0 + \delta) - y_0 - \{\alpha(m + x_0 + \delta) - y_0\} = n.$$

Por lo tanto, $\alpha m + \alpha x_0 + \alpha\delta - n - y_0 = \{\alpha(m + x_0 + \delta) - y_0\}$.

Notemos que, como α es irracional, la secuencia

$$\{\{\alpha m\}\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

es densa en el intervalo $[0,1)$. Es preciso advertir al lector sobre un doble uso de la notación de llaves $\{\dots\}$ en este texto. Por un lado, se emplean en su sentido habitual para designar conjuntos. Por otro lado, y siguiendo una convención frecuente, se utilizan para denotar la parte fraccionaria de un número real. El contexto en que aparezcan debería deshacer siempre cualquier posible ambigüedad.

Por el mismo motivo, la sucesión $\{\{\alpha(m+x_0+\delta)-y_0\}\}_{m\in\mathbb{Z}} = \{\{\alpha m+(\alpha x_0+\alpha\delta-y_0)\}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ también es densa en $[0,1)$. Por tanto, para cualquier $\varepsilon>0$, existen $m\in\mathbb{Z}$ (y $\delta\in(-\epsilon,\epsilon)$) tales que

$$-\epsilon<\alpha m+\alpha x_0+\alpha\delta-n-y_0<\epsilon$$

Por lo tanto $[(t,\alpha t)]\in\tau(V)\subseteq U$ y, así, M es un subconjunto denso $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Es importante resaltar aquello que se ha probado: *Se ha encontrado una variedad contenida en el toro, con una dimensión menor, que es densa en el toro.*

La implicación más directa de este hecho es la siguiente: *M no es una variedad con la topología subespacio del toro.*

Supongamos, por contradicción, que $M=f(\mathbb{R})$ fuera una variedad de dimensión 1 con la topología subespacio. Entonces, para cada punto $p\in M$, existiría una carta $U\subset\mathbb{T}^2$ con coordenadas $\varphi\colon U\to V\subset\mathbb{R}^2$ tales que

$$\varphi(U\cap M)=\{(x_1,x_2)\in V: x_2=0,\ |x_1|<\varepsilon\},$$

es decir, $U\cap M$ es una pequeña porción de recta en la carta. En particular $U\cap M$ no es denso en U (pues eso implicaría que $\varphi(U\cap M)$ lo es en V). Pero hemos visto que M es denso en $\mathbb{T}^2$, luego $U\cap M$ es denso en U para cualquier carta U, lo cual es una contradicción. Por tanto, la topología de M no puede ser la topología subespacio de $\mathbb{T}^2$. Así, en un lenguaje geométrico M es una «*subvariedad inmersa*» (f es una aplicación diferenciable, inyectiva, con diferencial inyectivo), pero no «*embebida*» (la topología no es la topología subespacio). $\diamondsuit$

1.5 Ejercicios

Ejercicio 2.1

Sean (X_1, T_1) y (X_2, T_2) dos espacios topológicos, y $f\colon X_1 \to X_2$ una aplicación. Entonces, f es continua si y solo si la antiimagen de todo cerrado es cerrado.

Ejercicio 2.2

Dados dos espacios topológicos (X_1, T_1) e (X_2, T_2), y una aplicación $f\colon X_1 \to X_2$, comprobar que la topología final T_f y la topología inicial T^f, definidas en el definición 2.10.10, están dadas por

$$T_f = \left\{U \subseteq X_2 \ : \ f^{-1}(U) \in T_1\right\}, \quad T^f = \left\{f^{-1}(U) \ : \ U \in T_2\right\}.$$

Ejercicio 2.3

Sea X un espacio topológico Hausdorff y segundo contable. Consideremos un subconjunto $S \subseteq X$ con la topología subespacio. Comprobar que:

1. Si X es Hausdorff, entonces S es Hausdorff,
2. Si X es segundo contable, entonces S es segundo contable.

Ejercicio 2.4

Sean X e Y espacios topológicos y consideremos a $X \times Y$ con la topología producto. Comprobar que:

1. Si X e Y son Hausdorff, entonces $X \times Y$ es Hausdorff,
2. Si X e Y son segundo contable, entonces $X \times Y$ es segundo contable.

Ejercicio 2.5

Un espacio topológico X es conexo por caminos si y solo si existe un punto $x \in X$ tal que, para cualquier otro punto $y \in X$, existe un camino con origen igual a x y final igual a y.

Pista: Emplear caminos producto e inversos.

Ejercicio 2.6

Probar que $\mathbb{H}^n$ es una variedad topológica, con la identidad como carta global.

Ejercicio 2.7

Demostrar que el interior y la frontera de $\mathbb{H}^n$ coinciden con el interior y la frontera topológicos de $\mathbb{H}^n$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la topología usual). Como consecuencia, probar que todo abierto de $\mathbb{H}^n$ que no contenga puntos frontera es un abierto en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2.8

Probar que todo espacio afín real de dimensión finita es una variedad diferenciable cuya dimensión es la misma que la del espacio afín.

Ejercicio 2.9

Sea M una variedad topológica de dimensión n. Probar que todo abierto $U \neq \emptyset$ de M es una variedad topológica de la misma dimensión.

Ejercicio 2.10

Estudiar si la condición de ser «*diferenciablemente equivalente*» es una relación de equivalencia.

Ejercicio 2.11

Dado un espacio topológico M, demostrar que M tiene estructura de variedad diferenciable si y solo si M es una variedad topológica que puede ser cubierta por los dominios de una familia de homeomorfismos,

$$\left\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \widehat{U}_\alpha \subseteq \mathbb{K}^n\right\}_{\alpha\in A},$$

de tal manera que $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ es diferenciable para todo α y β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Utilizar este hecho para probar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$ son variedades diferenciables de dimensión n.

Ejercicio 2.12

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Probar que todo abierto $U \neq \emptyset$ de M es una variedad diferenciable de la misma dimensión, de tal manera que la estructura diferenciable de U viene inducida por la estructura diferenciable de M, vía la restricción de las cartas locales de M a U.

Ejercicio 2.13

Demostrar que la estructura diferenciable inducida por la carta global

$$\begin{array}{cccc} \varphi_k: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi_k(x) = x^k, \end{array}$$

con $k = 2n+1$ y n un entero positivo, es distinta a la dada en el ejemplo 2.10.58.

Pista: Comprobar que la composición de la inversa de φ_k con la carta global del ejemplo 2.10.58 no es diferenciable.

Ejercicio 2.14

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. El ejercicio 2.12 muestra que todo abierto U de M es una variedad diferenciable de la misma dimensión. Demostrar que el interior y la frontera de U están dados por

$$\mathring{U} = U \cap \mathring{M}\,,$$
$$\partial U = U \cap \partial M\,.$$

Ejercicio 2.15

Dada una variedad diferenciable M y una función $f\colon M \to \mathbb{R}^k$, comprobar que la frontera $\partial\Gamma(f)$ y el interior $\mathring{\Gamma}(f)$ de su gráfica $\Gamma(f)$ vienen dados por

$$\begin{aligned} \partial\Gamma(f) &= \left\{(x,y) \in \partial M \times \mathbb{R}^k \;:\; y = f(x)\right\}\,, \\ \mathring{\Gamma}(f) &= \left\{(x,y) \in \mathring{M} \times \mathbb{R}^k \;:\; y = f(x)\right\}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.16

Probar que el atlas definido por la proyección estereográfica induce la estructura diferenciable estándar de la esfera. Para ello se ha de comprobar que las cartas de la proyección estereográfica son compatibles con las cartas $(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})$ dadas en el definición 2.10.84.

Ejercicio 2.17

Sea $\mathbb{S}_r^n$ la n-esfera de radio r y centro 0:

$$\mathbb{S}_r^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon ||x|| = r\right\}\,.$$

Comprobar, utilizando la estructura definida en el definición 2.10.84, que $\mathbb{S}_r^n$ es una variedad diferenciable sin borde de dimensión n. ¿Y si cambiamos el centro?

Ejercicio 2.18

Demostrar que el elipsoide de dimensión n

$$M = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;:\; \left(\frac{x^1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x^n}{a_n}\right)^2 \leq 1\right\}\,,$$

con $a_1, \ldots, a_n$ constantes reales positivas, es una variedad diferenciable con borde de dimensión n. Verificar además que la frontera y el interior están dados por

$$\partial M = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \left(\frac{x^1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x^n}{a_n}\right)^2 = 1 \right\},$$
$$\mathring{M} = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \left(\frac{x^1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x^n}{a_n}\right)^2 < 1 \right\}.$$

Ejercicio 2.19

Considerar las cartas $(B_i, \varphi_i^{\pm})$ definidas en el definición 2.10.85. Comprobar que las funciones de transición son diferenciables.

Ejercicio 2.20

Sean $M_1, \dots, M_k$ variedades diferenciables, de tal manera que únicamente M_k tenga borde no vacío. Demostrar que el producto $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ es una variedad diferenciable de dimensión

$$\dim M = \sum_{i=1}^{k} \dim M_i$$

tal que

$$\partial\left(M_1 \times \cdots \times M_k\right) = M_1 \times \cdots \times \partial M_k\,, \quad \operatorname{Int}\left(M_1 \times \cdots \times M_k\right) = M_1 \times \cdots \times \operatorname{Int} M_k\,.$$

Ejercicio 2.21

Considerar el cono $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2\right\}$ con la estructura de variedad dada en el ejemplo definición 2.10.90. Probar que la inclusión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, donde en $\mathbb{R}^3$ se considera la estructura de variedad diferenciable usual, no es diferenciable. *¿Se puede cambiar la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^3$ para que lo sea?*

Ejercicio 2.22

Considerar el paraboloide $N = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^4\right\}$ con la estructura de variedad dada en el ejemplo definición 2.10.90. Probar que la inclusión $i : N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, donde en $\mathbb{R}^3$ se considera la estructura de variedad diferenciable usual, es diferenciable.

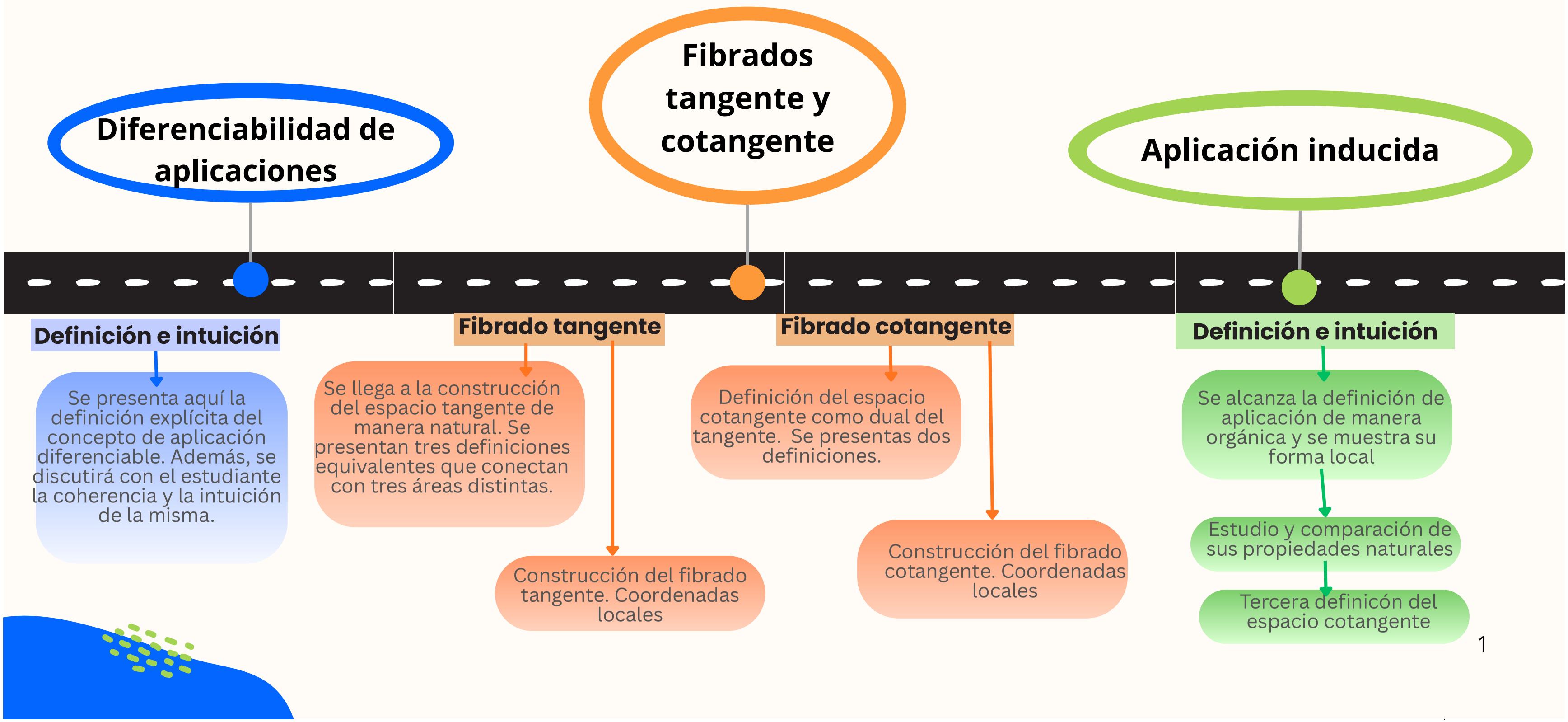
Tema 2.- Cálculo diferencial

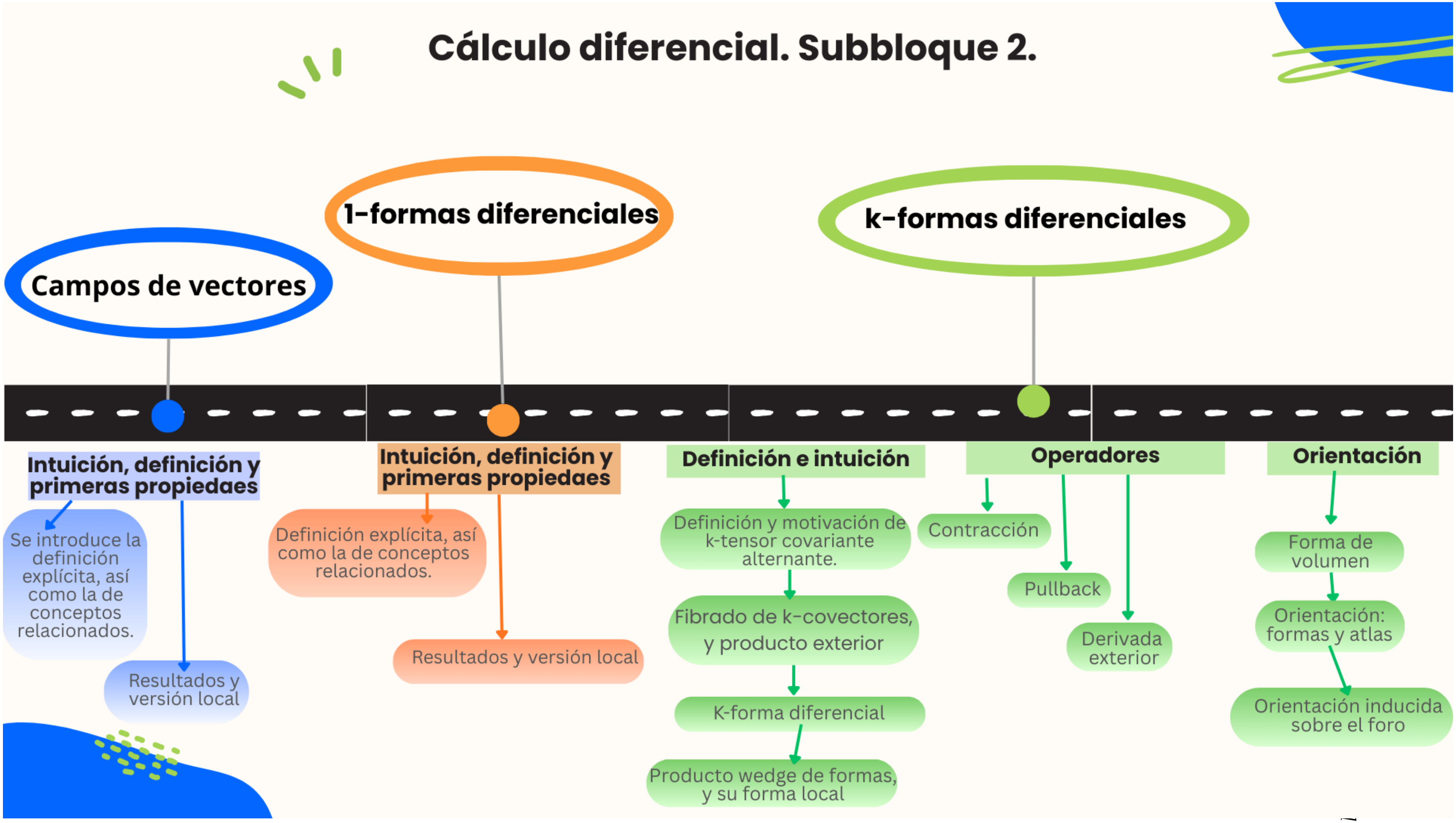
La finalidad principal de este capítulo es la introducción detallada del «*cálculo diferencial*» en variedades, ampliando así los fundamentos del cálculo diferencial aprendidos en las asignaturas «*Funciones de una variable I*» (61021022), «*Funciones de una variable II*» (61021074), «*Funciones de varias variables I*» (61021080) y «*Funciones de varias variables II*» (61022027) a variedades diferenciables. En este sentido, se emplea la estructura local inherente a una variedad diferenciable, particularmente las cartas locales, para establecer la noción de «*función diferenciable*» en una variedad. A grandes rasgos, una función será diferenciable si su «*versión local*» lo es. Esta idea refleja el principio rector de la teoría: *estudiar objetos globales a partir de sus descripciones locales*. Para una correcta comprensión de lo que se estudiará en este tema, se recomienda al lector tener nociones básicas de álgebra lineal (tales como espacio vectorial, espacio vectorial dual o aplicación lineal), así como nociones fundamentales de cálculo diferencial de varias variables.

Este tema se puede dividir en dos subbloques. El primero abarca desde la definición de la diferenciabilidad de una función, hasta la construcción de su derivada. Antes de poder definir el concepto de «*derivada*», debemos extender la noción de espacio tangente a una variedad en un punto. Desde un punto de vista intuitivo, de un modo análogo al caso euclídeo, un vector tangente a la variedad no es más que el vector velocidad de un camino diferenciable en ese mismo punto. De este modo, la derivada de una función diferenciable en un punto viene dada por la aplicación lineal definida en los respectivos espacios tangentes, cuya matriz asociada es el «*jacobiano*» de la función. Este desarrollo será de gran importancia para el desarrollo del segundo subbloque, que versará sobre el estudio de los campos de vectores y las formas diferenciales, ahondando el conceptos clave como la orientación de una variedad. Intuitivamente, un campo de vectores tangentes en una variedad puede entenderse como una asignación «*suave*» de un vector tangente a la variedad en cada punto de la misma. Por otro lado, una forma diferencial se puede entender como su homólogo dual y resultará esencial para poder definir la *integral en variedades* (subsección 2.10.6).

La estructura y el resumen de las ideas clave de estos dos subbloques se muestran en los siguientes diagramas:

Cálculo diferencial. Subbloque 1.




Cálculo diferencial. Subbloque 2.
Campos de vectores
1-formas diferenciales
k-formas diferenciales
Intuición, definición y primeras propiedaes
Se introduce la definición explícita, así como la de conceptos relacionados.
Resultados y versión local
Intuición, definición y primeras propiedaes
Definición explícita, así como la de conceptos relacionados.
Resultados y versión local
Definición e intuición
Definición y motivación de k-tensor covariante alternante.
Fibrado de k-covectores, y producto exterior
K-forma diferencial
Producto wedge de formas, y su forma local
Operadores
Contracción
Pullback
Derivada exterior
Orientación
Forma de volumen
Orientación: formas y atlas
Orientación inducida sobre el foro

Recurso visual que muestra la estructura global del segundo tema.

2.1 Aplicaciones diferenciables

Cómo se menciona en el esquema, en la primera parte de esta sección se define y estudia el concepto de «*función diferenciable*» sobre una variedad.

Antes de presentar la definición misma, se insta al estudiante a realizar una pausa reflexiva.

Dada una función $f : M \to \mathbb{R}$ definida sobre la variedad diferenciable M, cabe preguntar: ¿Qué condición debería imponer el lector a esta función para considerarla diferenciable? ¿En base a qué criterio se establece dicha condición? ¿Existe alguna suposición implícita que el lector esté haciendo a priori?

De esta manera, se busca que el estudiante empiece el tema reflexionando sobre la noción misma de diferenciabilidad de una función y su conexión con el concepto análogo estudiado en asignaturas previas. Una vez realizada la pregunta, se le presenta al estudiante la definición explícita.

Definición 2.10.95 (Diferenciabilidad)**.** *Sean M y N dos variedades diferenciables. Una función $F : M \to N$ se dice* ***diferenciable*** *o* ***derivable*** *en $x \in M$ si*

$$\psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}$$

es diferenciable en $\varphi_U(x)$, para toda carta local (U, φ_U) de M, con $x \in U$ y toda carta local (V, ψ_V) de N, con $F(x) \in V$. Diremos que F es ***diferenciable*** *o* ***derivable*** *si lo es en todo punto.*

Se muestra al estudiante el siguiente diagrama conmutativo que caracteriza esta definición; los diagramas de este tipo serán recurrentes en el texto y el área:

$$\begin{tikzcd}
U \subseteq M \arrow[r, "F|_U"] \arrow[d, "\varphi_U"] & V \subseteq N \arrow[d, "\psi_V"] \\
\widehat{U} \arrow[r, "\psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}"] & \widehat{V}
\end{tikzcd}$$

A la función $\overline{F} = \psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}$ se le denomina ***representación local de F*** o ***representación coordenada de F*** respecto a las cartas (U, φ_U) y (V, ψ_V). En este sentido, podemos afirmar que una función es diferenciable si su representación local lo es, respecto de cualesquiera cartas locales en M y N. En general, omitiremos la alusión a las cartas locales, salvo que sea crucial para evitar posibles confusiones o ambigüedades.

Buscamos ahora iniciar un diálogo con el lector/estudiante de la asignatura sobre la coherencia de la definición de derivabilidad que le motive a pensar, por sí mismo, si se pueden encontrar otras maneras de definir dicho concepto.

Iniciemos en este punto una reflexión, con un nivel de abstracción mayor, con objeto de proporcionar una intuición sobre la lógica interna subyacente a la definición de *diferenciabilidad*. El lector debe tener en cuenta que la observación que se desarrollará a continuación se debe entender más como una reflexión que como parte del contenido del texto y, aunque resulta conveniente para entender de dónde procede y cuál es la intuición inherente a la definición de diferenciabilidad, no es en absoluto esencial para la comprensión de esta definición. Por lo tanto, el lector puede optar por omitir esta discusión y tomar directamente la definición 2.10.95, si así lo considera oportuno.

El problema a abordar es el siguiente: supongamos que se fija una propiedad **(P)**, que está bien definida para funciones $\overline{F}\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, y es *relativa a los puntos del dominio*, esto es, $\overline{F}$ verifica, o no, la propiedad en cada uno de los puntos del dominio por separado ($\overline{F}$ es continua en un punto $x \in \mathbb{K}^m$, $\overline{F}$ es derivable en $x \in \mathbb{K}^m$, etc.) y nuestro objetivo es generalizar esta propiedad **(P)** para funciones $F\colon M \to N$ entre variedades, *¿cómo podríamos proceder?*

Antes de abordar la cuestión de una manera rigurosa, afrontemos la pregunta con un enfoque intuitivo. El nexo entre las variedades y los espacios $\mathbb{K}^m$ viene dado, esencialmente, por las cartas locales. Así, a grandes rasgos, la idea será trasladar esta propiedad de funciones sobre $\mathbb{K}^n$ a funciones sobre variedades a través de su cartas.

Luego, resulta coherente afirmar que esta propiedad será satisfecha por las cartas locales y por sus inversas. Por otro lado, para que este «*trasvase*» funcione, la propiedad **(P)** debe preservarse por composición; estas dos propiedades cobran aún más sentido si se mira a través de la «*lente categórica*», esto es, se espera que esta propiedad determine cierta clase de funciones que forman una categoría con las variedades. Además, puesto que una variedad es «*localmente*» homeomorfa a $\mathbb{K}^n$, las únicas propiedades que, *a priori*, tenemos la esperanza de extrapolar a las variedades son aquellas que, desde algún punto de vista, sean «*locales*». Veamos en qué se traducen estas condiciones.

Sea $\mathcal{F}$ el espacio de todas las funciones $F\colon M \to N$, con M y N dos variedades arbitrarias. Sea **(P)** la propiedad relativa a los puntos del dominio de las funciones del espacio de funciones sobre los espacios $\mathbb{K}^n$ que buscamos generalizar a $\mathcal{F}$. Entonces, pediremos que **(P)** satisfaga las siguientes propiedades:

1. Es una **propiedad local**: una función entre variedades $F\colon M \to N$ cumple **(P)** en $x \in M$ si existe un entorno U de x tal que la restricción $F|_U : U \to N$ satisface **(P)** en x.

2. La **composición de aplicaciones** preserva **(P)**: sean $F : M \to N$ y $G : N \to Q$ dos funciones entre variedades, y $x \in M$. Si F cumple **(P)** en x, y G satisface **(P)** en $F(x)$, entonces $G \circ F$ verifica **(P)** en x.

3. Para cada variedad M, existe un recubrimiento por cartas de M tal que cada carta φ_α y su inversa φ_α^{-1} poseen la propiedad **(P)** en todos los puntos de sus respectivos dominios.

Notemos que 1 y 2 aportan cierta coherencia a la propiedad de **(P)**; mientras que 3 aporta una familia de funciones que cumplen esta propiedad. Aunque el axioma 3 resulta ser una imposición (se afirma que cierta familia de cartas cumple la propiedad que se busca generalizar), veremos más adelante que dicho recubrimiento debe cumplir cierta «*condición de compatibilidad*» para que se pueda dar 3.
Observemos que la «*continuidad*» es una propiedad sobre el espacio de funciones $\mathcal{F}(M, N)$, relativa a los puntos de M, que cumple 1, 2, y 3. Luego, por supuesto, la diferenciabilidad no va a ser la *única* propiedad que pueda aprovechar el razonamiento que se va a presentar. Asumamos, además, que las identidades $\mathrm{Id}_M : M \to M$ satisfacen **(P)** en todos los puntos del dominio, para cualquier variedad M. Entonces, el axioma 1 se puede sustituir como sigue:

Proposición 2.10.96. *Sea $F : M \to N$ una función entre variedades diferenciables, y $x \in M$. Entonces, F satisface **(P)** en x si y solo si la restricción $F|_U : U \to N$ satisface **(P)** en x, para todo abierto U que contenga a x.*

Demostración. Notemos que la diferencia entre esta proposición y el axioma 1 radica, en esencia, en la distinción entre «*para todo*» y «*existe al menos un*». Así, la implicación «$\Leftarrow$» es obvia.
Probemos «$\Rightarrow$». Supongamos que F satisface **(P)** en x, y que U es el entorno de x que satisface que la restricción $F|_U : U \to N$ satisface **(P)** en x. Sea V otro entorno de x. Hay tres casos posibles:

I Si $U \subseteq V$, entonces $F|_V$ satisface **(P)** en x puesto que U es un entorno de x en V (con la topología subespacio).

II Si $V \subseteq U$, para todo $y \in V$, podemos encontrar un carta (W, φ_W) tal que $y \in W \subseteq V$ (basta tomar una carta cualquiera alrededor de y e intersecar el entorno coordenado con V). Entonces,

$$\varphi_W \circ i_V|_W \circ \varphi_W^{-1} = \mathrm{Id}_{\varphi_W(W)} ,$$

con $i_V : V \hookrightarrow U$ la inclusión. Es decir, $\varphi_W \circ i_V|_W \circ \varphi_W^{-1}$ es la identidad sobre un abierto de $\mathbb{K}^n$, luego satisface **(P)** en todos sus puntos. Así, utilizando 2 y 3, tenemos que

$$i_V|_W = \varphi_W^{-1} \circ \left(\varphi_W \circ i_V|_W \circ \varphi_W^{-1}\right) \circ \varphi_W$$

satisface **(P)** en todos los puntos del dominio. Dado que hemos partido de un punto arbitrario y de V, esto prueba que $i_V : V \hookrightarrow U$ satisface **(P)** en todo el dominio.

Ahora bien, $F|_V = F|_U \circ i_V$. Luego, de nuevo en base al axioma 2, en efecto, $F|_V$ satisface **(P)** en x.

III En cualquier otro caso, $x \in V \cap U \neq \emptyset$. Entonces, $V \cap U$ es un entorno de x que satisface que $V \cap U \subseteq U$. Por lo tanto, en base a II, $F|_{V\cap U}$ satisface **(P)** en x. Ahora, además, $V \cap U \subseteq V$ y, utilizando I, se tiene que $F|_V$ satisface **(P)** en x.

□

Sea **(P)** una propiedad sobre $\mathcal{F}$ relativa a los puntos del dominio, verificando 1 y 2. Tomemos M una variedad diferenciable de dimensión n, y $\left\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \widehat{U}_\alpha \subseteq \mathbb{K}^n\right\}_{\alpha\in A}$ una familia de cartas locales que recubre M. Para que se cumpla 3 sobre dicha familia de cartas, esta debe satisfacer la siguiente condición de *compatibilidad*: teniendo en cuenta 2 y 3, se tiene que para todo α y β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, los cambios de cartas $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ deben satisfacer **(P)** en todos sus puntos.
En otras palabras, sea cual sea la propiedad que queremos generalizar a funciones sobre variedades mediante cartas, esta debe cumplirse por los cambios de cartas de un determinado recubrimiento, los cuales son aplicaciones cuyo dominio y codominio son abiertos en $\mathbb{K}^n$. En este sentido diremos que la propiedad **(P)** ***generaliza*** a su homólogo en funciones sobre los espacios $\mathbb{K}^n$ si se puede encontrar un recubrimiento por cartas locales sobre cualquier variedad tal que los cambios de cartas verifican **(P)** en todo el dominio.

Observemos que, en este punto, cobra sentido la condición de ser *diferenciablemente compatible*. En otras palabras, si la composición $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ resulta no ser diferenciable, se rompe la coherencia diferencial entre las cartas y, por ende, no se podría dar una definición de diferenciabilidad de funciones que cumpla 1, 2, y 3. Por tanto, la condición de ser *diferenciablemente compatible* no solo es una exigencia técnica, sino que es fundamental para garantizar que la estructura diferenciable de la variedad sea coherente.

De este modo, la propiedad de ***ser diferenciable en un punto*** se define como una propiedad sobre el espacio $\mathcal{F}$, relativa a los puntos de dominio de las funciones, cumpliendo 1, 2 y 3, y que generaliza a la propiedad de *ser diferenciable en un punto* para funciones entre abiertos de los espacios $\mathbb{K}^n$.

Sea $F : M \to N$ una función diferenciable, y sean $\left\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \widehat{U}_\alpha \subseteq \mathbb{K}^n\right\}_{\alpha \in A}$ y $\left\{\psi_\beta : V_\beta \to \widehat{V}_\beta \subseteq \mathbb{K}^m\right\}_{\beta \in B}$ dos atlas diferenciables de M y N, respectivamente. Fijando $x \in M$, existen U_α y V_β tales que $x \in U_\alpha$ y $F(x) \in V_\beta$. Así, la restricción $F|_{U_\alpha}$ verifica que

$$F|_{U_\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \left(\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}\right) \circ \varphi_\alpha \,.$$

Notemos que se ha restringido el codominio de $F|_{U_\alpha}$ a los puntos de V_β para que esta composición tenga sentido. Así, dado que se satisfacen los puntos 1, 2, y 3, se recupera la definición 2.10.95.

Proposición 2.10.97 (Diferenciabilidad)**.** *Sean M y N dos variedades diferenciables. Una función $F : M \to N$ es diferenciable en $x \in M$ si y solo si $\psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_U(x)$, para toda carta local $(U \ni x, \varphi_U)$ de M y toda carta local $(V \ni F(x), \psi_V)$ de N.*

Demostración. La implicación «⇒» ya está demostrada. Comprobemos que se da «⇐». Dado que se trata de componer por cartas, que están definidas en entornos abiertos, resulta obvio que será una *propiedad local*, esto es, se satisface 1. Por otro lado, tomemos dos funciones $F : M \to N$ y $G : N \to Q$ entre variedades, de tal manera que F es diferenciable en $x \in M$, y G es diferenciable en $F(x)$. Tomemos (U, φ_U) carta local en x, (V, φ_V) carta local en $F(x)$, y (W, φ_W) carta local en $G(F(x))$. Entonces, se tiene que

$$\varphi_W \circ (G \circ F) \circ \varphi_U^{-1} = \left(\varphi_W \circ G \circ \varphi_V^{-1}\right) \circ \left(\varphi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}\right) \,,$$

es decir, es composición de aplicaciones diferenciables y, por lo tanto, es diferenciable en $x \in M$; en otras palabras, se da 2. Finalmente, la condición de ser *diferenciablemente compatibles* implica que las cartas locales de cualquier recubrimiento que genere la estructura diferenciable de una variedad son diferenciables y, en consecuencia, se verifica 3. □

Como se ha comentado, en general, la definición 2.10.95 resulta ser la definición más común de diferenciabilidad de funciones sobre variedades, y resultará más útil para la mayoría de los propósitos de este texto. No obstante, este enfoque con un mayor grado de abstracción nos permite desarrollar una estrategia para afrontar cualquier otro problema que requiera generalizar cierta propiedad a funciones sobre variedades.

A partir de este punto se presentarán una serie de resultados que buscan facilitar el estudio de la diferenciabilidad de funciones, tales como:

- **Estudio por coordenadas:** Una función F es diferenciable si lo son todas sus coordenadas $F^i = x^i \circ F$.

- **Ejemplos de aplicaciones diferenciables:** Tales como las aplicaciones constantes.

Además se iniciará un nuevo diálogo con el estudiante que pretende que el estudiante razone un posible «*camino inverso*». El orden que, a priori, a seguido el texto parece bastante natural. Se empezó recordando el concepto de *espacio topológico* 2.10.1, lo que dio lugar a la construcción de las nociones de *aplicación continua* 2.10.8 y *variedad topológica* 2.10.57. A su vez, esto permitió concebir la idea de *variedad diferenciable* 2.10.67, que llevó a generalizar el concepto de *aplicación diferenciable* 2.10.95. Una vez definidos todos estos conceptos, resulta que las cartas locales que inducen la estructura diferenciable sobre la variedad son, al mismo tiempo, aplicaciones diferenciables. Es decir, la estructura diferenciable sobre una variedad M está *unívocamente determinada* por la familia de aplicaciones *diferenciables* sobre la variedad $\mathscr{C}^{\infty}_{\text{loc}}(M)$ o, dicho de otro modo, la estructura diferenciable nos permite determinar el espacio $\mathscr{C}^{\infty}_{\text{loc}}(M)$ y, recíprocamente, conocido el espacio $\mathscr{C}^{\infty}_{\text{loc}}(M)$ podemos definir las cartas locales y, por consiguiente, construir la estructura diferenciable. De esta manera, aunque sobrepasa todos los objetivos del texto, uno podría plantearse «*redefinir*» el concepto de variedad diferenciable a través de su colección de funciones diferenciables.

Finalmente, se presenta el concepto de difeomorfismo, junto con el resultado que muestra que todo difeomorfismo preserva la dimensión.

2.2 Fibrados tangente y cotangente

En esta sección empezaremos por estudiar cómo llegar a una definición explícita de *vector tangente a una variedad*. **Con objeto de facilitar, de nuevo, el proceso de aprendizaje del estudiante, nos detendremos aquí para reflexionar sobre este problema**. Pensemos en una variedad M de dimensión 2 contenida en $\mathbb{R}^3$. Entonces, para cada punto $x \in M$, uno suele pensar en el plano tangente a ese punto como un plano «*exterior a la variedad*» que, en un entorno de x, «*toca*» a la variedad únicamente en x.

Sin embargo, la definición de variedad dada en este libro es intrínseca: puede no existir un «*espacio ambiente*», esto es, no podemos asumir, *a priori*, que existe un conjunto X de tal manera que nuestra variedad M esté propiamente contenida en X. Así, antes de leer cuál va a ser el camino natural de construir esta noción, sería fructífero hacernos la siguiente pregunta:

> *¿Cómo, en estas condiciones, podemos establecer una noción coherente de espacio tangente de una variedad en un punto? Más específicamente, ¿cómo podemos definir el concepto de «vector tangente» a un punto dado?*

Con objeto de resolver este problema de la manera más natural posible, empecemos trabajando con *caminos diferenciables sobre la variedad*. Sea $\alpha : I \to M$ un camino sobre una variedad diferenciable M, con I un intervalo de $\mathbb{R}$. Recordemos que α es diferenciable si

$$\varphi_U \circ \alpha\colon J \to \varphi_U(U) \subseteq \mathbb{K}^n \tag{2.4}$$

es diferenciable, para toda carta local (U, φ_U) de la estructura diferenciable de M tal que $U \cap \alpha(I) \neq \emptyset$ y $J = \alpha^{-1}(U)$.

Fijemos entonces un camino $\alpha : I \to M$ diferenciable sobre M. Veamos cómo podemos definir la *derivada de α en $t_0 \in I$*. Observemos que, para toda $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, la composición $f \circ \alpha$ es una aplicación diferenciable de I en $\mathbb{R}$, y tiene sentido calcular la derivada $(f \circ \alpha)'\big|_{t_0}$, con $t_0 \in I$. Luego, definiremos la ***derivada de** α **en** t_0*, como el siguiente funcional lineal:

$$\begin{array}{rccl} \alpha'(t_0): & \mathscr{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & (f \circ \alpha)'\big|_{t_0}. \end{array} \tag{2.5}$$

De este modo, la ***derivada direccional de** f **a lo largo de** $\alpha'(t_0)$* viene dada por la evaluación de f en $\alpha'(t_0)$, esto es,

$$\{\alpha'(t_0)\}(f) \;=\; (f \circ \alpha)'\big|_{t_0}.$$

Definición 2.10.98. *Sea M una variedad. Una **derivación en x** es un funcional lineal*

$$v\colon \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

tal que

$$v(f \cdot g) = f(x)\, v(g) + g(x)\, v(f)\,,\ \forall f, g \in \mathscr{C}^{\infty}(M)\,. \tag{2.6}$$

No está de más recordar que un *funcional lineal* $v\colon \mathscr{C}^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ no es más que una aplicación lineal, esto es,

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)\,,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathscr{C}^{\infty}(M)\,.$$

Una vez que hemos definido el concepto de derivada de un camino diferenciable, y atendiendo a lo que sucede en el espacio euclídeo usual, resulta natural definir el espacio tangente de una variedad en un punto como sigue:

Definición 2.10.99. *Sea M una variedad diferenciable, y $x \in M$. Se define el* ***espacio tangente en*** *x, denotado por $\mathsf{T}_x M$, como la familia de todas las derivadas de todos los caminos diferenciables α en M con respecto a un parámetro t_0 tal que $x = \alpha(t_0)$, es decir,*

$$\mathsf{T}_x M := \{\alpha'(t_0)\ :\ \alpha \textit{ es un camino diferenciable, y } x = \alpha(t_0)\}$$

Los elementos de $\mathsf{T}_x M$ se denominan ***vectores tangentes a M en x****.*

Sea $x = \alpha(t_0)$, y $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ una carta local con $x \in U$. Entonces, para cada $f \in \mathscr{C}^{\infty}(M)$,

$$\begin{aligned}
\left.(f \circ \alpha)'\right|_{t_0} &= \left.\left(f \circ \varphi_U^{-1} \circ \varphi_U \circ \alpha\right)'\right|_{t_0} \\
&= \left.\mathrm{d}\left(f \circ \varphi_U^{-1}\right)\right|_{\varphi_U(x)} \left(\left.(\varphi_U \circ \alpha)'\right|_{t_0}\right) \\
&= \left.\mathrm{d}\left(f \circ \varphi_U^{-1}\right)\right|_{\varphi_U(x)} \left(\left.\left(x^1 \circ \alpha\right)'\right|_{t_0}, \ldots, \left.(x^n \circ \alpha)'\right|_{t_0}\right) \\
&= \left.\left(x^i \circ \alpha\right)'\right|_{t_0} \left.\frac{\partial\left(f \circ \varphi_U^{-1}\right)}{\partial r^i}\right|_{\varphi_U(x)}
\end{aligned}$$

Aquí $\left(r^1, \ldots, r^n\right)$ son las coordenadas canónicas de $\mathbb{K}^n$.

Definición 2.10.100. *Sea M una variedad con borde de dimensión n, y $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ una carta local de M. Se define la* ***derivada parcial i-ésima en x respecto a*** *φ_U, con $x \in U$, como el funcional lineal*

$$\begin{array}{rccc}
\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\colon & \mathscr{C}^{\infty}(U) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& f & \longmapsto & \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x = \left.\frac{\partial\left(f \circ \varphi_U^{-1}\right)}{\partial r^i}\right|_{\varphi_U(x)}.
\end{array}$$

En base a la definición dada, se tiene que

$$\left.(f \circ \alpha)'\right|_{t_0} = \left.\left(x^i \circ \alpha\right)'\right|_{t_0} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x.$$

Se prueba así el siguiente resultado que busca que el estudiante tenga acceso a la segunda definición equivalente del espacio tangente, que resulta bastante usual en la literatura.

Teorema 2.10.101. *Sea M una variedad diferenciable, y $\left(U, \left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ una carta de M. Entonces, el espacio tangente $\mathsf{T}_x M$ en cualquier punto $x \in U$ es un espacio vectorial de dimensión n y la familia de derivadas parciales $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x \right\}_{i=1,\ldots n}$ forma una base.*

Se lidia en este punto con la forma local de todo vector tangente, a saber:

$$v_x = v_x \left(x^j\right) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x$$

Además, se estudia la forma que toma la matriz cambio de coordenadas.

Expondremos ahora la mencionada tercera construcción alternativa, y equivalente, del espacio tangente a una variedad en un punto dado.

Proposición 2.10.102. *Sea M una variedad diferenciable con borde y $x \in M$. El espacio tangente de M en x es el conjunto de todas las derivaciones en x. De hecho, toda derivación v se escribe como*

$$v\left(f\right) = \sum_{i=1}^{n} v\left(x^i\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_x, \quad \forall f \in \mathscr{C}^\infty(M)\,. \tag{2.7}$$

Notemos que la ecuación (2.7) justifica el nombre de *derivación en un punto*; se ha probado que cualquier funcional lineal sobre $\mathscr{C}^\infty\left(M\right)$ que satisfaga la ecuación (2.6) es, esencialmente, la «*derivada direccional en x*» a lo largo de un vector dado.

Se presentan al estudiante, así, tres maneras diferentes de construir el espacio tangente de una variedad M en un punto x: una «*geométrica*» (como el conjunto de las derivadas de todos los caminos en M), una «*algebraica*» (como la envolvente lineal de las derivadas parciales), y una más «*analítica*» (los funcionales lineales que cumplen la ecuación (2.6)). **Con esto se busca que el aprendizaje sea significativo y que el estudiante genere una mayor cantidad de conexiones con el resto de asignaturas del grado**.

Sea M una variedad diferenciable. Los vectores del espacio tangente a M en un punto x serán, generalmente, denotados utilizando x como subíndice, esto es, v_x, w_x, u_x, etc. La unión disjunta de todos los espacios tangentes en cada uno de los puntos de M,

$$\mathsf{T}M = \bigsqcup_{x \in M} \mathsf{T}_x M,$$

recibe también el nombre de **fibrado tangente** de M. Además, la **proyección canónica** de $\mathsf{T}M$ será la aplicación $\tau_M : \mathsf{T}M \to M$ dada por

$$\tau_M\left(v_x\right) = x,\ \forall v_x \in \mathsf{T}_x M,\ x \in M\,.$$

Para cada $x \in M$, al espacio tangente $\mathsf{T}_x M$ también se le llama ***fibra de*** $\mathsf{T}M$ ***en*** x. Notemos que cada elemento de $\mathsf{T}M$ queda caracterizado por un punto x en M y un vector en $T_x M$. Así, uno puede intuir que, en caso de ser una variedad, la dimensión de $\mathsf{T}M$ es el doble de la dimensión de M.

Teorema 2.10.103. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Entonces, $\mathsf{T}M$ es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.*

Demostración. Aquí, más que dar la demostración, para resumir el contenido de este proyecto, vamos introducir las coordenadas del fibrado tangente tal y como se presentan al alumno/a.

Dado un $v_x \in \mathsf{T}_x M$, consideremos una carta local (U, φ_U) de M, con $x \in U$. Entonces, usando el teorema 2.10.101, todo vector $w_y \in \mathsf{T}_y M$, con $y \in U$, se escribe como

$$w_y = w_y\left(x^i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y .$$

Así, se construye la carta local alrededor de w_y dada por,

$$\begin{array}{cccc} \Phi_U: & \tau_M^{-1}(U) & \longrightarrow & \varphi_U(U) \times \mathbb{R}^n \\ & w_y & \longmapsto & \left(\varphi_U(y), w_y\left(x^1\right), \ldots, w_y\left(x^n\right)\right) . \end{array}$$

$\square$

En base a la demostración del teorema anterior, una carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ de M induce una carta $\left(\tau_M^{-1}(U), \Phi_U\right)$ de $\mathsf{T}M$, cuyas coordenadas son denotadas por $\Phi_U = \left(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n\right)$ están dadas por

$$x^i\left(w_y\right) = x^i(y) , \quad \dot{x}^i\left(w_y\right) = w_y\left(x^i\right) , \quad \forall\, w_y \in \mathsf{T}_y M , \quad \forall\, y \in U$$

A estas coordenadas se las denomina ***coordenadas canónicas de*** $\mathsf{T}M$ ***inducidas por*** $\left(x^i\right)$. De la misma manera, a la carta local $\left(\tau_M^{-1}(U), \Phi_U\right)$, inducida por la carta local (U, φ_U) en M, se le denomina ***carta local canónica de*** $\mathsf{T}M$ ***inducida por*** (U, φ_U).

Corolario 2.10.104. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces, la proyección canónica $\tau_M : \mathsf{T}M \to M$ de $\mathsf{T}M$ en M es una aplicación diferenciable.*

Habiendo acabado con el tangente, se empieza a introducir ahora el espacio cotangente como su dual. Sea M una variedad diferenciable, y $x \in M$. Se define el **espacio cotangente** a M en x, denotado por $\mathsf{T}_x^* M$, como el espacio dual al espacio tangente a M en x, es decir,

$$\mathsf{T}_x^* M = \left(\mathsf{T}_x M\right)^* \tag{2.8}$$

En otras palabras, el espacio cotangente $\mathsf{T}_x^* M$ viene dado por las aplicaciones lineales $\alpha_x : \mathsf{T}_x M \to \mathbb{R}$; a estas aplicaciones se las llama **covectores tangentes en** x.

+

Sea $\left(U,\left(x^1,\ldots,x^n\right)\right)$ una carta local en M con $x \in U$. Entonces, las derivadas parciales en x definen una base de $\mathsf{T}_x M$. Entonces, podemos definir su base dual, denotada por $\mathrm{d}x^i\big|_x$, que se caracteriza en base a la siguiente igualdad:

$$\mathrm{d}x^i\big|_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x\right)=\delta_i^j,\ \forall i,j\,. \tag{2.9}$$

Con esto, todo covector α_x en x se escribe como combinación lineal de los covectores $\mathrm{d}x^i\big|_x$, es decir, todo covector α_x en x puede escribirse como

$$\alpha_x=\sum_{i=1}^n \mu_i \mathrm{d}x^i\big|_x\,. \tag{2.10}$$

donde, por la linealidad de α_x,

$$\mu_j=\alpha_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x\right),\ \forall j\,. \tag{2.11}$$

Resulta pertinente resaltar que los covectores $\mathrm{d}x^i\big|_x$ se pueden, de hecho, definir sin usar las derivadas parciales en x. En efecto, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, se puede comprobar (ejercicio 2.31) que el covector $\mathrm{d}x^i\big|_x : \mathsf{T}_x M \to \mathbb{R}$ viene dado por

$$\mathrm{d}x^i\big|_x\left(v_x\right)=v_x\left(x^i\right),\ \forall v_x \in \mathsf{T}_x M\,. \tag{2.12}$$

De este modo, hemos comprobado que el espacio cotangente en un punto x se puede definir de dos maneras equivalentes: como el espacio dual al espacio tangente en x, y como el espacio vector cuya base viene dada por los covectores $\mathrm{d}x^i\big|_x$ definidos por la ecuación (2.12). Más adelante, probaremos que, de manera análoga a como se define el espacio tangente como el espacio de todas las derivadas de todos los caminos, el espacio cotangente se puede definir como la *familia de las derivadas en x de todas las funciones diferenciables definidas sobre un entorno de x* (definición 2.10.109). Se define ahora el **fibrado cotangente** de M, denotado por T^*M, como la unión disjunta de todos los espacios cotangentes en todos los puntos, es decir,

$$\mathsf{T}^*M=\bigsqcup_{x\in M}\mathsf{T}_x^*M\,.$$

Por otro lado, la **proyección canónica** de T^*M será la aplicación dada por $\pi_M : \mathsf{T}^*M \to M$ tal que

$$\pi_M\left(\alpha_x\right)=x,\ \forall \alpha_x \in \mathsf{T}_x^*M,\ x\in M\,.$$

Para cada $x \in M$, al espacio vectorial T_x^*M también se le llama ***fibra de T^*M en x***.

Teorema 2.10.105. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Entonces, T^*M es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.*

Demostración. Consideremos una carta local (U, φ_U) de M, con $x \in U$. Entonces, teniendo en cuenta la ecuación (2.11), todo covector $\beta_y \in \mathsf{T}^*_y M$ con $y \in U$, se escribe como

$$\beta_y = \beta_y \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_y \right) \left. \mathrm{d}x^i \right|_y .$$

Así, se puede definir la estructura diferencial vendrá generada por las siguientes cartas locales:

$$\begin{array}{rccc} \Psi_U : & \pi_M^{-1}(U) & \longrightarrow & \varphi_U(U) \times \mathbb{R}^n \\ & \beta_y & \longmapsto & \left(\varphi_U(y), \beta_y \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_y \right), \dots, \beta_y \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_y \right) \right) . \end{array}$$

$\square$

Una carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^1, \dots, x^n\right)\right)$ de M induce una carta $\left(\pi_M^{-1}(U), \Psi_U\right)$ de $\mathsf{T}^* M$, cuyas coordenadas $\Psi_U = \left(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n\right)$ están dadas por

$$x^i(\beta_y) = x^i(y) \ , \quad y^j(\beta_y) = \beta_y \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_y \right)$$

A estas coordenadas se las denomina ***coordenadas canónicas de*** $\mathsf{T}^* M$ ***inducidas por*** $\left(x^i\right)$. De la misma manera, a la carta local $\left(\pi_M^{-1}(U), \Psi_U\right)$, inducida por la carta local (U, φ_U) en M, se le denomina ***carta local canónica de*** $\mathsf{T}^* M$ ***inducida por*** (U, φ_U).

Corolario 2.10.106. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces, la proyección canónica $\pi_M : \mathsf{T}^* M \to M$ de $\mathsf{T}^* M$ en M es una aplicación diferenciable.*

2.3 Aplicación inducida

Esta sección constituye la culminación de uno de los objetivos fundamentales de este texto: extender el cálculo diferencial, tal como se conoce en espacios euclídeos, al contexto de variedades diferenciables. Por su parte, el cálculo integral será abordado en el tema siguiente. Hasta ahora hemos recorrido buena parte del camino necesario para alcanzar este objetivo: sabemos cómo se define la diferenciabilidad de una función entre variedades, y cómo derivar curvas diferenciables sobre una variedad, previo paso por los espacios tangentes y cotangentes. Analicemos ahora cómo puede definirse la derivada de una aplicación diferenciable entre variedades.

Empecemos reflexionando sobre qué condiciones debería satisfacer una definición razonable de la *diferencial de una aplicación diferenciable entre variedades*. Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable, y sea $x \in M$ un punto fijo. Si deseamos extender la noción clásica de derivada en x al contexto de variedades diferenciables, es natural exigir que su generalización, que denotaremos por $\mathsf{T}_x F$, sea una aplicación lineal

$$\mathsf{T}_x F : \mathsf{T}_x M \longrightarrow \mathsf{T}_{F(x)} N \, ,$$

que actúe como una suerte de derivada direccional de F en el punto x y en la dirección $v_x \in \mathsf{T}_x M$.

Ahora bien, si queremos que esta noción se comporte de manera coherente con la derivada usual en espacios euclídeos (y en particular que respete la regla de la cadena) entonces no hay lugar a ambigüedades: la única posibilidad admisible para $\mathsf{T}_x F\left(v_x\right)$ es que se trate del vector tangente en $F(x)$ tal que, para toda función diferenciable $f : N \to \mathbb{R}$, se verifique la identidad

$$\left\{\mathsf{T}_x F\left(v_x\right)\right\}(f) = v_x\left(f \circ F\right) .$$

Esta fórmula no sólo captura la derivada direccional de la composición $f \circ F$ en la dirección v_x, sino que garantiza que la construcción de la diferencial es canónica: *no depende de coordenadas, ni de representaciones auxiliares, sino únicamente de las propiedades geométricas de las variedades involucradas.* **Observemos como, en todo momento, se intenta llevar al estudiante a la definición buscada, de tal manera que esta se presente como la opción más natural**. En algunos otros textos, por analogía con la notación utilizada en cálculo, esta aplicación aparece denotada como «$\mathrm{d}F|_x$» o «$\mathrm{D}F|_x$».

Definición 2.10.107. *Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. La* ***inducida tangente de F*** *o* ***diferencial de F*** *es la aplicación*

$$\mathsf{T}F : \mathsf{T}M \to \mathsf{T}N$$

dada por

$$\mathsf{T}F\left(v_y\right) = \mathsf{T}_y F\left(v_y\right) \in \mathsf{T}_{F(y)} N ,$$

para cada $y \in M$ y cada $v_y \in \mathsf{T}_y M$.

Notemos que la inducida tangente de una aplicación diferenciable $F : M \to N$ contiene tanto la información de F como la de la derivada de F. De hecho, está definida de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}M \arrow[r, "\mathsf{T}F"] \arrow[d, "\tau_M"] & \mathsf{T}N \arrow[d, "\tau_N"] \\
M \arrow[r, "F"] & N
\end{tikzcd}$$

Consideremos vector en $v_x \in \mathsf{T}_x M$ cualquiera, y sea $\left(U, \varphi_U = \left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ una carta local en M alrededor de x, se escribe $v_x = v_x\left(x^i\right) \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x$. Entonces, se prueba al estudiante la siguiente fórmula local:

$$\mathsf{T}_x F\left(v_x\right)=v_x\left(x^i\right) \left.\frac{\partial\left(y^j \circ F\right)}{\partial x^i}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(x)} .$$

donde $\left(V,\left(y^1, \ldots, y^m\right)\right)$ son coordenadas locales alrededor de $F(x)$. **Se resalta así una similitud con el cálculo estudiando previamente: la diferencial (o inducida tangente) está caracterizada por la matriz jacobiana en cada punto**.

Se dedica ahora gran parte de esta sección a demostrar muchas otras similitudes que esta definición tiene con su concreción en analisis. Entre las cuales, se quisieran destacar las siguientes:

- **Concepto local:** Sean $F, G : M \rightarrow N$ dos aplicaciones diferenciables. Si $F(x)=G(x)$ para todo x en un abierto $\mathcal{U}$ de M, entonces
$$\mathsf{T}_x F=\mathsf{T}_x G,\ \forall x \in \mathcal{U} .$$
- **Regla de la cadena:** Dadas dos aplicaciones diferenciables $F : M \rightarrow N$ y $G : Q \rightarrow M$, para todo $x \in Q$, se tiene que
$$\mathsf{T}_x(F \circ G)=\mathsf{T}_{G(x)} F \circ \mathsf{T}_x G .$$
- **Derivada de la identidad:** Para todo $x \in M$,
$$\mathsf{T}_x \operatorname{Id}_M=\operatorname{Id}_{\mathsf{T}_x M} .$$
- **Derivada de un difeomorfismo:** Sea $F : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Entonces, para todo $x \in M$, $\mathsf{T}_x F$ es un isomorfismo lineal. De hecho,
$$\left(\mathsf{T}_x F\right)^{-1}=\mathsf{T}_{F(x)} F^{-1} .$$

Se demuestra después que los casos ya introducidos son ejemplos particulares de esta noción. En particular, denotemos por $\frac{\partial}{\partial t}$ a la derivada parcial relativa a la identidad. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ un camino diferenciable. Entonces, para todo $t_0 \in I$, se tiene que

$$\mathsf{T}_{t_0} \alpha\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0}\right)=\alpha^{\prime}\left(t_0\right)$$

Por otro lado, finalmente se destaca la inducida tangente de este tipo de aplicaciones dará lugar a la noción conocida como *derivada exterior*. Dada $f \in \mathscr{C}^{\infty}(M)$ y $x \in M$, la ***derivada exterior de f en x*** se define como el covector

$$\left.\mathrm{d} f\right|_x : \mathsf{T}_x M \rightarrow \mathbb{R} ,$$

dado por

$$\left.\mathrm{d} f\right|_x\left(v_x\right)=v_x(f) ,\ \forall v_x \in \mathsf{T}_x M .$$

Por lo tanto, la derivada exterior de f en x no es más que la evaluación de la inducida tangente de f en x en la aplicación identidad. Dicho de otro modo,

$$\mathrm{d}f|_x(v_x) = \{\mathsf{T}_x f(v_x)\}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}), \ \forall v_x \in \mathsf{T}_x M. \tag{2.13}$$

Sea $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ una carta local en M, con $x \in U$. Cómo consecuencia, **los covectores $\mathrm{d}x^i|_x$ ya definidos anteriormente se pueden interpretar como la derivada exterior de cada una de las coordenadas locales x^i en el punto x (ejercicio 2.32)**.

Definición 2.10.108. *Sea M una variedad diferenciable y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Se define la **derivada exterior de f** como la aplicación*

$$\mathrm{d}f : M \to \mathsf{T}^* M$$

tal que

$$\{\mathrm{d}f(x)\}(v_x) = \mathrm{d}f|_x(v_x), \ \forall v_x \in \mathsf{T}_x M.$$

Veremos más adelante que $\mathrm{d}f$ es un ejemplo de un concepto más general denominado 1-*forma sobre M*.

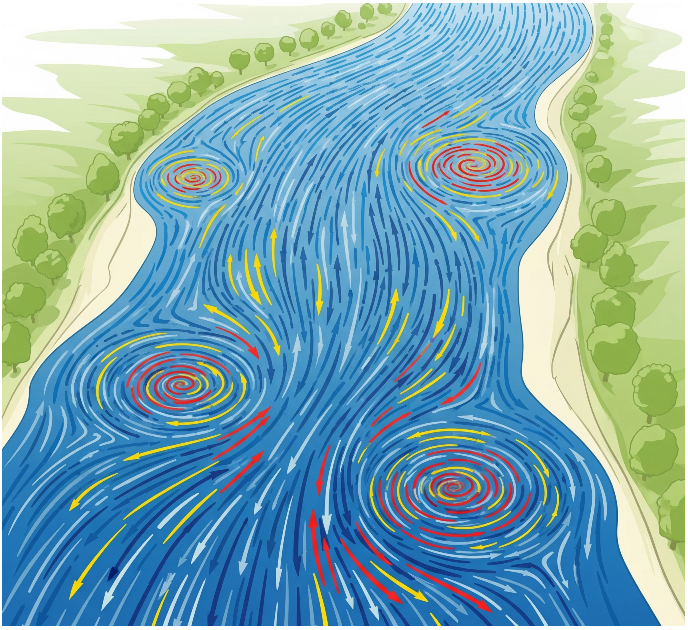
Esta construcción nos permite probar la tercera definición equivalente del espacio cotangente que ya se había mencionado.

Proposición 2.10.109. *Sea M una variedad diferenciable, y $x \in M$. Entonces, el espacio cotangente $\mathsf{T}^*_x M$ en x se puede escribir como la familia de todas las derivadas exteriores en x de las funciones definidas sobre un abierto que contiene a x.*

Esta proposición contrasta con lo que ocurre a nivel local o global con 1-formas. En el lenguaje de 1-formas, este resultado se traduce en que toda 1-forma es «*puntualmente*» la derivada de una función. Sin embargo, a nivel local las únicas 1-formas que cumplen esta afirmación son las denominadas *formas cerradas* (definición 2.10.129). Mientras que desde una perspectiva global ni siquiera esta condición es suficiente, salvo en cierto tipo de dominios (como se estudiará en la subsección 2.10.6).

2.4 Campos de vectores tangentes

El propósito principal de esta sección será establecer con rigurosidad los conceptos de *campos de vectores*. Desde una perspectiva intuitiva, un campo de vectores tangente a una variedad M puede entenderse como una asignación «*suave*» de un vector tangente a M en cada punto de la misma. Con objeto de aportar una *idea mental* de un campo de vectores tangente al estudiante es imaginarse la corriente de un río; en cada instante, cada punto del agua del río tiene una dirección y velocidad específicos que se pueden representar por la asignación, en dicho punto, de un vector con una dirección y módulo determinados.



Los campos de vectores son esenciales en matemáticas y otras áreas de la ciencia porque describen cómo se «*mueven*» o «*fluyen*» las cosas sobre espacios no euclídeos. Por ejemplo, en física, los campos de vectores se pueden emplear para describir el campo de velocidades de un sistema mecánico, y en relatividad general se pueden utilizar para representar las simetrías del espacio-tiempo. En matemáticas, entre otras utilidades, los campos de vectores definen ecuaciones diferenciales autónomas sobre variedades.

Mostraremos al estudiante primero el concepto de **sección**, para concretar a posteriori en campos de vectores y formas diferenciales.

Definición 2.10.110. *Sean M y N dos variedades diferenciables, y $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. Se llamará **sección** de F a toda aplicación $\sigma : N \to M$ tal que*

$$F \circ \sigma = \mathrm{Id}_N \ .$$

*Se dirá que la sección σ es **diferenciable** si lo es como aplicación de N en M.*

La siguiente pregunta es, de nuevo, un ejemplo de las cuestiones que se presentan al estudiante con objeto de que reflexione.

Dada una aplicación diferenciable $F : M \to N$, y una sección diferenciable σ de F, ¿tiene $\sigma(N)$ estructura diferenciable? En caso afirmativo, ¿cómo se relaciona con la estructura de M?

Definición 2.10.111 (Campo de vectores)**.** *Sea M una variedad diferenciable. Un* ***campo de vectores*** *(o* ***campo vectorial****) sobre M es una sección diferenciable $X : M \to \mathsf{T}M$ de la proyección canónica τ_M de $\mathsf{T}M$. El espacio de todos los campos de vectores sobre M se denotará por $\mathfrak{X}(M)$.*

Se muestra seguidamente al alumno/a que $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura de $\mathscr{C}^\infty(M)$-módulo, con el objetivo de reforzar conocimientos previamente estudiados en álgebra lineal.

Se presentarán, siempre estimulando la intuición del estudiante, los siguientes conceptos:

Definición 2.10.112. *Dado un subconjunto C de una variedad M, un* ***campo de vectores a lo largo de*** *C viene dado por una aplicación $X : C \to \mathsf{T}M$, que es:*

- ***Sección:*** *Para todo $x \in C$, $X(x) \in \mathsf{T}_xM$.*
- ***Diferenciable:*** *Para todo $x \in C$, existe un abierto $U \subseteq M$, con $x \in U$, y una extensión diferenciable $\tilde{X}$ de X a U, es decir,*
  - *$\tilde{X} : U \to \mathsf{T}U \subseteq \mathsf{T}M$ es un campo de vectores.*
  - *Para todo $y \in C \cap U$, $\tilde{X}(y) = X(y)$*

Como primeros ejemplos de este concepto se presentan al estudiante los siguientes:

- ***Campo de vectores local*** es un campo de vectores a lo largo de un abierto U de la variedad M. En otras palabras, dado que $\mathsf{T}_xU = \mathsf{T}_xM$, para todo $x \in U$, un campo de vectores local se escribe como una aplicación diferenciable $X_U : U \to TM$, tal que $X(x) \in \mathsf{T}_xM$, para todo $x \in U$.
- ***Campo de vectores a lo largo de*** $\alpha : I \to M$ es una aplicación es una aplicación diferenciable $X : I \to \mathsf{T}M$ tal que
$$\tau_M \circ X = \alpha\,.$$

Definición 2.10.113. *Sea M una variedad diferenciable. Una* ***derivación en M*** *es un operador lineal*
$$X : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$$
tal que
$$X(fg) = fX(g) + gX(f)\,,\ \forall f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)\,. \tag{2.14}$$

Definición 2.10.114 (Pushforward)**.** *Sea $F : M \to N$ un difeomorfismo. El* ***pushforward de F*** *viene dado por la aplicación*
$$F_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \mapsto F_*X \in \mathfrak{X}(N)\,,$$
con
$$\{F_*X\}(x) = \mathsf{T}_{F^{-1}(x)}F\left(X\left(F^{-1}(x)\right)\right),\ \forall x \in N\,.$$

Equivalentemente, $F_*X \in \mathfrak{X}(N)$ se puede definir como la aplicación que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[d, "F"] & \mathsf{T}M \arrow[d, "\mathsf{T}F"] \\ N \arrow[r, "F_*X"] & \mathsf{T}N \end{tikzcd}$$

Se presentan y se prueban los siguientes resultados asociados a este concepto:

- **Forma local:** Toda sección $X : M \to \mathsf{T}M$ de τ_M se escribe localmente como

$$X = X\left(x^i\right)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.15}$$

  de tal manera que X es una sección diferenciable (o campo de vectores) si, y sólo si, lo son sus coordenadas $X\left(x^i\right)$.

- **Derivación:** Todo campo de vectores X sobre una variedad M se puede representar equivalentemente como una derivación en M.

- **Pushforward y derivación:** Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, y un difeomorfismo $F : M \to N$. Entonces, para todo $f \in \mathscr{C}^\infty(N)$,

$$F_*X(f) = \left\{X \circ F^{-1}\right\}(f \circ F) \ .$$

- **Pushforward (versión local):** Sea una carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ de M, y la carta local inducida $\psi_V = \varphi_U \circ F|_V{}^{-1} = \left(y^j\right)$. Entonces, las componentes locales de F_*X en el punto son, exactamente, las componentes locales de X, i.e.,

$$F_*X = \left[X\left(x^i\right) \circ F^{-1}\right]\frac{\partial}{\partial y^i} \ .$$

2.5 1-formas diferenciales

Una forma diferencial puede interpretarse como el homólogo dual de un campo de vectores. Más formalmente, una k-forma diferencial en una variedad M es una asignación «*suave*» de un covector alternado de grado k en cada punto de la variedad. Estas formas proporcionan una herramienta fundamental para el cálculo integral en variedades. De hecho, resultan esenciales para poder *integrar sobre variedades* (subsección 2.10.6). En física, las formas diferenciales se utilizan, por ejemplo, para describir fuerzas ejercidas sobre un cuerpo. De nuevo, para una lectura comprensiva de la sección, se le recomienda al estudiante poseer un sólido entendimiento de los principios básicos de conceptos fundamentales de cálculo, incluyendo la continuidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables, así como de nociones elementales de álgebra lineal (espacios vectoriales, aplicaciones lineales, etc.).

Definición 2.10.115 (Forma diferencial)**.** *Sea M una variedad diferenciable. Una* ***forma diferencial****,* ***1-forma diferencial*** *o* ***uno forma diferencial*** *se define como una sección diferenciable $\eta : M \to \mathsf{T}^*M$ de la proyección canónica π_M de T^*M. El espacio de todas las formas diferenciales sobre M se denota por $\Omega^1(M)$.*

En otras palabras, una forma diferencial es una aplicación diferenciable $\eta : M \to \mathsf{T}^*M$ tal que

$$\eta(x) \in \mathsf{T}^*_x M, \ \forall x \in M\,.$$

Notemos que, al igual que $\mathfrak{X}(M)$, se muestra al estudiante que el espacio $\Omega^1(M)$ tiene estructura de $\mathscr{C}^\infty(M)$-módulo (y, por ende, de $\mathbb{R}$-espacio vectorial). Se muestra, además, que la derivada exterior es un ejemplo de $1-$forma diferencial, dando pie a la posterior generalización de la derivada exterior.

Análogamente a como se procedió con campos de vectores, se presentan y se prueban los siguientes resultados asociados a este concepto:

- **Versiones equivalentes:** Sea M una variedad diferenciable, y $\eta : M \to \mathsf{T}^*M$ una sección de π_M. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  1. La sección η es diferenciable.
  2. η define una aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-lineal $\mathfrak{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$, dada por la igualdad,
  $$\{\eta(X)\}(x) = \eta(x)(X(x)), \ \forall x \in M$$
  3. La función $\eta : \mathsf{T}M \to \mathbb{R}$ dada por,
  $$\eta(v_x) = \{\eta(x)\}(v_x), \ \forall v_x \in \mathsf{T}_x M, \ x \in M$$
  es diferenciable.

  Es importante señalar que se advertirá al estudiante de la aparente ambigüedad en la notación empleada, tanto en formas diferenciales como en campos de vectores. En particular, se utilizará el mismo símbolo η para denotar tres objetos que, desde un punto de vista estrictamente formal, corresponden a aplicaciones distintas: la aplicación que asigna a cada punto de la variedad un covector, la aplicación definida sobre el fibrado tangente y, finalmente, la aplicación que actúa sobre campos de vectores.

Este uso responde a un abuso de notación deliberado cuyo objetivo es evitar una sobrecarga que dificultaría la compresión del texto.

- **Forma local:** Toda sección $\eta : M \to \mathsf{T}^*M$ de π_M se escribe localmente como,

$$\eta = \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}x^i \,. \tag{2.16}$$

de tal manera que η es una sección diferenciable (o $1-$forma diferencial) si, y sólo si, lo son sus coordenadas $\eta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

2.6 Formas diferenciales de grado k

En esta sección, ampliaremos el concepto de 1-forma diferencial extendiéndolo al de *k-forma diferencial*. Recordemos que una de las caracterizaciones equivalentes de una 1-forma diferencial consiste en considerarla como una aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-lineal

$$\eta\colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(M), \quad X \longmapsto \eta(X)\,.$$

Uno se puede aproximar al concepto de *k-forma diferencial* generalizando esta idea: una k-forma diferencial ω puede definirse como una aplicación diferenciable y $\mathscr{C}^\infty(M)$-multilineal

$$\omega\colon \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(M),$$

que toma k campos de vectores como argumentos y que, además, es *alternante*, es decir, cambia de signo ante la permutación de dos de sus argumentos. **Para desarrollar esta generalización con precisión, se empieza por mostrar al estudiante la noción de *tensor covariante*.**

Definición 2.10.116 (Tensor covariante)**.** *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Un **k-tensor covariante**, o simplemente **k-tensor**, en V es una aplicación multilineal $T : V \times \cdots^{k)} \cdots \times V \to \mathbb{R}$.*

El estudio de tensores (y campos de tensores) resulta de gran interés por sí mismo. De este estudio surgen áreas tan relevantes como la geometría Riemanniana. Sin embargo, en este texto estaremos interesados en un tipo específico de tensores covariantes, los tensores covariantes «*alternantes*».

Definición 2.10.117 (Tensor alternante)**.** *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Un **k-tensor covariante alternante**, o simplemente **k-tensor alternante** en V es una aplicación multilineal $T : V \times \cdots^{k)} \cdots \times V \to \mathbb{R}$ tal que*

$$T\left(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k\right) = -T\left(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k\right)\,,$$

para todo $v_1, \ldots, v_n \in V$. El espacio de todos los k-tensores alternantes en V se denota por $\bigwedge^k(V^*)$.

Notemos que los 1-tensores son sencillamente los elementos del dual de V, esto es, $\Lambda^1(V^*) = V^*$. Por convención, se definen 0-tensores como los escalares: $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$.

Se muestran, además, como resultado, las propiedades elementales de este tipo de objetos:

Teorema 2.10.118. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, y T un k-tensor covariante en V. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es alternante.*

2. *Para todo $v_1, \ldots, v_{k-2}, w \in V$,*

$$T(v_1, \ldots, w, \ldots, w, \ldots, v_{k-2}) = 0\,.$$

3. *$T(v_1, \ldots, v_k) = 0$, siempre que $v_1, \ldots, v_k \in V$ sean linealmente dependientes.*

Volviendo ahora al contexto de variedades diferenciables, estamos ya preparados para presentar al estudiante la siguiente definición:

Definición 2.10.119. *Sea M una variedad diferenciable, y $x \in M$. Un **k-covector** η_x en x viene dado por un k-tensor alternante en $\mathsf{T}_x M$.*

De esta manera, explícitamente, un k-covector η_x en x viene dado por una aplicación $\eta_x : \mathsf{T}_x M \times \cdots^{k)} \cdots \times \mathsf{T}_x M \to \mathbb{R}$, multilineal y alternante. Así, los covectores en x (ver identidad (2.8)) son los 1-covectores en x.

Análogamente, a como se construye el fibrado cotangente T^*M de M, el ***fibrado de k-covectores*** se define como la unión disjunta de todos los espacios de los k-covectores en un x, esto es,

$$\bigwedge^k(\mathsf{T}^*M) = \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^k(\mathsf{T}^*_x M)\,.$$

La ***proyección canónica de*** $\bigwedge^k(\mathsf{T}^*M)$ se define como la aplicación $\pi^k_M : \bigwedge^k(\mathsf{T}^*M) \to M$ tal que

$$\pi^k_M(\eta_x) = x,\ \forall \eta_x \in \bigwedge^k(\mathsf{T}^*_x M)\,,\ x \in M\,.$$

Para cada $x \in M$, al espacio vectorial $\bigwedge^k(\mathsf{T}^*_x M)$ se le denomina **fibra de** $\bigwedge^k(\mathsf{T}^*M)$ **en x**.

Recordemos que para probar que el fibrado tangente $\mathsf{T}M$ y el fibrado cotangente T^*M son variedades diferenciables, necesitamos antes construir una base local. En efecto, las pruebas de los definiciones 2.10.103 and 2.10.105 se apoyan fuertemente en que, para cada carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ de M, se pueden definir bases locales de secciones de τ_M y π_M:

- $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right\}$ es una base de T_xM, para todo $x \in U$.
- $\left\{\mathrm{d}x^i\big|_x\right\}$ es una base de T_x^*M, para todo $x \in U$.

Siguiendo esta línea de pensamiento, parece que necesitaremos construir una base local de secciones de π_M^k, esto es, buscaremos un número finito de secciones de π_U^k, con U un subconjunto abierto de M, de tal manera que su evaluación en cada punto $x \in U$ produce una base del espacio $\bigwedge^k\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$. Notemos que resulta trivial demostrar que, para todo $x \in M$, el conjunto $\bigwedge^k\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (análogo a T_xM o T^*M).

Así, **se presenta al alumno/a el *producto exterior* como una herramienta para construir una base del espacio vectorial de k-covectores en un punto**.

Definición 2.10.120 (Producto exterior de covectores)**.** *Sea M una variedad diferenciable, y $x \in M$. Para cada $\eta_x \in \bigwedge^k\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$ y $\nu_x \in \Lambda^l\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$, se define el **producto exterior**, o **producto wedge**, de η_x y ν_x, como el $(k+l)$-covector $\eta_x \wedge \nu_x$ en x tal que, para todo $v_1, \ldots v_{k+l} \in \mathsf{T}_xM$,*

$$\eta_x \wedge \nu_x\left(v_1, \ldots, v_{k+l}\right) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \eta_x\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) \nu_x\left(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}\right),$$

donde S_{k+l} es el espacio de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, k+l\}$, y $\operatorname{sgn}(\sigma)$ denota el signo de la permutación (ver ejercicio 2.42).

Se presentan y se demuestran, en este punto, algunas propiedades elementales:

- **Bilineal y asociativo:** Para cada punto x de una variedad diferenciable M,

  1. $\eta_x \wedge \left(\lambda\nu_x + \mu\nu_x'\right) = \lambda\left(\eta_x \wedge \nu_x\right) + \mu\left(\eta_x \wedge \nu_x'\right)$,
  2. $\left(\lambda\eta_x + \mu\eta_x'\right) \wedge \nu_x = \lambda\left(\eta_x \wedge \nu_x\right) + \mu\left(\eta_x' \wedge \nu_x\right)$,
  3. $\eta_x \wedge \left(\nu_x \wedge \omega_x\right) = \left(\eta_x \wedge \nu_x\right) \wedge \omega_x$,

  para todo $\eta_x, \eta_x' \in \bigwedge^k\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$, $\nu_x, \nu_x' \in \Lambda^l\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$, $\omega_x \in \Lambda^r\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$, y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- **Antisimétrico:** Para todo $\eta_x \in \bigwedge^k\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$ y $\nu_x \in \Lambda^l\left(\mathsf{T}_x^*M\right)$, se cumple

$$\eta_x \wedge \nu_x = (-1)^{kl}\, \nu_x \wedge \eta_x,$$

- **Base:** Para todo $x \in M$,

$$\mathcal{B}^k := \left\{ \mathrm{d}x^{i_1}\big|_x \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\big|_x \ : \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \right\}$$

  es una base de $\bigwedge^k (\mathsf{T}^*_x M)$. Como consecuencia se muestra que $\bigwedge^k (\mathsf{T}^*_x M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $\binom{n}{k}$ y, por lo tanto, $\Lambda^n (\mathsf{T}^*_x M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1.

Utilizando estas propiedades, estamos ya listos para probar que el fibrado de covectores es una variedad diferenciable.

Teorema 2.10.121. *Sea M una variedad de dimensión n. Entonces, $\bigwedge^k (\mathsf{T}^* M)$ es una variedad de dimensión $n + \binom{n}{k}$.*

Demostración. Dada una carta local (U, φ_U) de M, con $x \in U$, todo k-covector $\nu_y \in \bigwedge^k \left(\mathsf{T}^*_y M\right)$, con $y \in U$, se escribe como

$$\nu_y = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \nu_y^{i_1, \ldots, i_k} \mathrm{d}x^{i_1}\big|_y \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\big|_y \, .$$

Consecuentemente, se define la siguiente aplicación carta local:

$$\begin{array}{rccc} \Psi_U^k : & \left(\pi_M^k\right)^{-1}(U) & \longrightarrow & \varphi_U(U) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \\ & \nu_y & \longmapsto & \left(\varphi_U(y), \nu_y^{i_1, \ldots, i_k}\right) \, . \end{array}$$

□

Corolario 2.10.122. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces la proyección canónica $\pi_M^k : \bigwedge^k (\mathsf{T}^* M) \to M$ de $\bigwedge^k (\mathsf{T}^* M)$ es una aplicación diferenciable.*

Habiendo dotado a $\bigwedge^k (\mathsf{T}^* M)$ de estructura diferenciable, tiene sentido definir las k-formas diferenciales de manera análoga a los campos de vectores y las 1-formas diferenciales.

Definición 2.10.123 (k-forma diferencial)**.** *Sea M una variedad diferenciable. Una* ***k-forma diferencial*** *se define como una sección diferenciable $\eta : M \to \bigwedge^k (\mathsf{T}^* M)$ de la proyección canónica π_M^k de $\bigwedge^k (\mathsf{T}^* M)$. El espacio de todas las formas diferenciales sobre M se denotará por $\Omega^k(M)$. El entero k se llama* ***grado*** *de la forma diferencial.*

En otras palabras, una k-forma diferencial es una aplicación diferenciable $\eta : M \to \bigwedge^k (\mathsf{T}^* M)$ tal que

$$\eta(x) \in \bigwedge^k (\mathsf{T}^*_x M) \, , \ \forall x \in M \, .$$

De nuevo, es sencillo comprobar que el espacio $\Omega^k(M)$ tiene estructura de $\mathscr{C}^\infty(M)$-módulo. Por convención, $\Omega^0(M) = \mathscr{C}^\infty(M)$.

Análogamente a los campos de vectores, se puede extender ligeramente la noción de k-forma diferencial a un subconjunto C de M. Una ***k-forma diferencial a lo largo de C*** viene dada por una aplicación $\eta : C \to \bigwedge^k (\mathsf{T}^* M)$, que es:

- **Sección:** Para todo $x \in C$, $\eta(x) \in \bigwedge^k (\mathsf{T}^*_x M)$.
- **Diferenciable:** Para todo $x \in C$, existe un abierto $U \subseteq M$, con $x \in U$, y una *extensión diferenciable $\tilde{\eta}$ de η a U*, es decir,
  - $\tilde{\eta} : U \to \bigwedge^k (\mathsf{T}^* U)$ es una k-forma diferencial.
  - Para todo $y \in C$, $\tilde{\eta}(y) = \eta(y)$

Con la misma filosofía que en campos de vectores, se utiliza esta notación para definir una $k-$forma local. **Se sigue así una narrativa similar a la utilizada en campos de vectores y 1-formas diferenciales.**. En particular, se muestra al estudiante las siguientes propiedades elementales:

- **Versiones equivalentes:** Sea M una variedad diferenciable, y $\eta : M \to \bigwedge^k (\mathsf{T}^* M)$ una sección de π^k_M. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  i) η es diferenciable.
  ii) $\eta : \mathfrak{X}(M) \times \ldots^{k)} \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ es una aplicación alternante y $\mathscr{C}^\infty(M)$-multilineal. En particular, la diferenciabilidad se traduce en que para cualesquiera k campos de vectores $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta(X_1, \ldots, X_k) \in \mathscr{C}^\infty(M)$.
- **Forma local:** Sea ν una sección de π^k_M, y $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ una carta local en M. Entonces,

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}. \tag{2.17}$$

El producto exterior, definido en covectores, se extiende a k-formas diferenciales.

Definición 2.10.124 (Producto exterior de formas)**.** *Sea M una variedad diferenciable. Para cada $\eta \in \Omega^k(M)$ y $\nu \in \Omega^l(M)$, se define el **producto exterior**, o **producto wedge**, de η y ν, como la $(k+l)$-forma $\eta \wedge \nu$, tal que para todo $x \in M$,*

$$(\eta \wedge \nu)(x) = \eta(x) \wedge \nu(x).$$

*Si $f \in \Omega^0(M) = \mathscr{C}^\infty(M)$ y $\nu \in \Omega^k(M)$, el **producto exterior** es el producto usual punto a punto, es decir,*

$$(f \wedge \eta)(x) = f(x)\eta(x), \quad \forall x \in M.$$

Sean $\eta \in \Omega^k(M)$ y $\nu \in \Omega^l(M)$, $\eta \wedge \nu$ es una $(k+l)$-forma diferencial en M, con coordenadas locales dada por,

$$(\eta \wedge \nu)_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \eta_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}} \nu_{i_{\sigma(k+1)},\ldots,i_{\sigma(k+l)}}. \tag{2.18}$$

donde, $\eta_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}}$ y $\nu_{i_{\sigma(k+1)},\dots,i_{\sigma(k+l)}}$ son las respectivas coordenadas locales de η y ν.
Definimos el espacio de formas diferenciales de grado arbitrario como

$$\Omega(M) = \bigsqcup_{i=0}^{n} \Omega^i(M).$$

Así, el producto exterior se define como una aplicación

$$\wedge : \Omega(M) \times \Omega(M) \to \Omega(M),$$

de tal manera que, si restringimos a $\Omega^k(M) \times \Omega^l(M)$, se obtiene una función $\mathscr{C}^\infty(M)$-multilineal de $\Omega^k(M) \times \Omega^l(M)$ en $\Omega^{k+l}(M)$.

A partir de este punto, lo que resta del tema estará dedicado a introducir y estudiar algunos de los operadores más importantes en el área.

Contracción

A menudo será útil «*fijar*» una de las variables de una forma diferencial, por un campo de vectores determinado. Esta operación, conocida como *contracción*, reduce el orden de la forma y produce una nueva forma de menor grado. Intuitivamente, podemos pensar en la contracción como una manera de «*insertar*» un vector en una forma, o de «*bloquear*» una de sus entradas con un campo fijo. Esta operación, que en apariencia es sencilla, juega un papel fundamental. Entre otros usos importantes, permite definir operadores como la derivada de Lie de formas diferenciales vía el teorema de Cartan [16]. En relación con otros campos de investigación, esta operación permite, de hecho, definir el campo Hamiltoniano de un sistema dinámico [1].

Sea M una variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, para toda $\eta \in \Omega^k(M)$, se define la ***contracción*** de η por X, como la $(k-1)$-forma $\iota_X \eta$ tal que

$$\iota_X \eta(X_1, \dots, X_{k-1}) = \eta(X, X_1, \dots, X_{k-1}),$$

para cualesquiera $X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$. Por convención, asumiremos que $\iota_X f$ es cero si f es una 0-forma. De este modo, para cada campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, entenderemos la contracción como una aplicación

$$\iota_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$$

que restringida a $\Omega^k(M)$ es una aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-lineal de $\Omega^k(M)$ en $\Omega^{k-1}(M)$.

Se presenta y se prueba un resultado que muestra cómo interaccionan el producto exterior y la contracción. A lo largo de todo el texto se seguirá esta filosofía y se presentarán resultados mostrando dichas correlaciones entre los operadores que se imparten en este tema.

Proposición 2.10.125. *Sea M una variedad diferenciable, y $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \Omega^1(M)$. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\iota_X(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \iota_X \eta_i (\eta_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \cdots \wedge \eta_k), \tag{2.19}$$

donde $\hat{\eta}_i$ expresa la omisión de η_i.

Asimismo, en el ejercicio 2.51 se prueba el siguiente corolario:

Corolario 2.10.126. *Sea M una variedad diferenciable, y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $\nu \in \Omega^l(M)$, y $\eta \in \Omega^k(M)$, se tiene que*

$$\iota_X(\eta \wedge \nu) = (\iota_X \eta) \wedge \nu + (-1)^k \eta \wedge (\iota_X \nu).$$

Siguiendo el mismo enfoque que en las secciones anteriores (y posteriores) se deducirá la versión local. En particular, dados un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ y una k-forma $\eta \in \Omega^k(M)$, con expresiones locales

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$
$$\eta = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \eta_{i_1, \ldots, i_k} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

en una carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$, se tiene que las respectivas componentes locales de $\iota_X \eta$ vienen dadas por

$$(\iota_X \eta)_{i_1, \ldots, i_{k-1}} = (-1)^{r_j - 1} X^j \eta_{i_1, \ldots i_{r_j - 1}, j, i_{r_j} \ldots, i_{k-1}},$$

para cada $1 \le i_1 < \cdots < i_{k-1} \le n$, donde r_j define la posición de j en la lista $i_1, \ldots, i_{k-1}$, de tal manera que $1 \le i_1 < \ldots i_{r_j - 1} < j < i_{r_j} \ldots < i_{k-1}$.

Pullback

En la sección 2.10.6, definimos el *pushforward* de campos de vectores (definición 2.10.114), que proporciona una manera de transformar un campo de vectores en otro campo de vectores, a través de un difeomorfismo.

El pullback cumplirá una función similar para k-formas diferenciales. Así pues, en este punto, se anima al lector a buscar por sí mismo la posible definición de este operador antes de leer la definición dada más abajo.

Definición 2.10.127 (*Pullback*)**.** *Sean M y N variedades, y $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. Entonces, para cada $\eta \in \Omega^k(N)$, con $k \geq 1$, se define el* ***pullback*** *de η como la k-forma $F^*\eta$ en M tal que*

$$\{F^*\eta(x)\}(v_{1x}, \ldots, v_{kx}) = \eta(F(x))(\mathsf{T}_x F(v_{1x}), \ldots, \mathsf{T}_x F(v_{kx})),$$

para todo $x \in M$ y $v_{1x}, \ldots, v_{kx} \in \mathsf{T}_x M$. En particular, si $f \in \Omega^0(M) = \mathscr{C}^\infty(N)$, entonces $F^* f = f \circ F$.

Se muestra seguidamente que podemos, efectivamente, entender el *pullback* de F como una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $F^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$, tal que su restricción a los espacios $\Omega^k(N)$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$.

Desde un punto de vista intuitivo, el pullback de una forma η sobre N por la aplicación F consiste en componer a η con la derivada de F, evaluando los vectores en M como si los estuviéramos proyectando dentro de N. El resultado es una forma sobre M, que refleja, intuitivamente, la manera en que la geometría de N se percibe desde M a través de F. Esta operación será esencial para definir integrales de formas sobre variedades parametrizadas, así como para expresar de forma unificada los cambios de coordenadas y las transformaciones geométricas.

Ahora se probarán resultados de interacción las operaciones conocidas:

- **Pullback y wedge:** Sean M y N variedades, y $F : M \to N$. Entonces, para cada $\eta \in \Omega^k(N)$ y $\nu \in \Omega^l(N)$, se tiene que
$$F^*(\eta \wedge \nu) = F^*\eta \wedge F^*\nu\,.$$
- **Pullback y composición:** Sean M, N y Z tres variedades, junto a dos aplicaciones diferenciales $F : M \to Z$ y $G : Z \to N$. Entonces,
$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$
- **Pullback y derivada exterior (de una función):** Sean M y N variedades, y $F : M \to N$. Entonces, para cada $g \in \mathscr{C}^\infty(N)$, se tiene que
$$F^*\mathrm{d}g = \mathrm{d}(g \circ F)\,.$$
Más adelante generalizaremos este resultado a la derivada exterior de k-formas.

Además, se presentarán dos resultados locales que pueden ser útiles para cálculos explícitos a posteriori:

- **Forma local:** Sean M y N dos variedades de dimensiones n y m, respectivamente. Consideremos una carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ en M, una carta local $\left(V, \psi_V = \left(y^j\right)\right)$ en N, y una función diferenciable $F : M \to N$. Entonces, las componentes locales de $F^*\eta$ vienen dadas por

$$\begin{aligned}&\left(F^*\eta\right)_{i_1,\ldots,i_k}\\ &= \sum_{\sigma\in S_k}\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq m}\left(\eta_{j_1,\ldots,j_k}\circ F\right)\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{\partial\left(y^{j_1}\circ F\right)}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}}\cdots\frac{\partial\left(y^{j_k}\circ F\right)}{\partial x^{i_{\sigma(k)}}}\,.\end{aligned}$$

- **Pullback de una forma de volumen:** Sean M y N dos variedades con la misma dimensión n, y $F : M \to N$. Entonces,

$$F^*\left(f \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n\right) = \det\left(J\tilde{F}\right)(f\circ F)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

con $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ una carta local en M, $\left(V, \psi_V = \left(y^j\right)\right)$ una carta local en N tal que $F(U)\cap V \neq \emptyset$, $\tilde{F} = \psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}$, y donde $J\tilde{F}$ representa el jacobiano de $\tilde{F}$.

Derivada exterior

Esta sección está dedicada a generalizar el concepto de *derivada exterior* (véase la definición 2.10.108) para funciones diferenciables sobre una variedad. Recordemos que, para cada $f \in \mathscr{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$, la derivada exterior es una forma de un grado mayor, $\mathrm{d}f \in \Omega^1(M)$, definida a través de la inducida tangente como sigue:

$$\left.\mathrm{d}f\right|_x(v_x) = v_x(f)\,,\ \forall v_x \in \mathsf{T}_x M\,. \tag{2.20}$$

Del mismo modo que en este caso, la derivada exterior de una $0-$forma resulta en una $1-$forma que generaliza, en cierto sentido a su gradiente; en el caso general la derivada exterior toma una k-forma y produce una $(k+1)$-forma, codificando de manera precisa la información de las derivadas parciales de las coordenadas de la k-forma dada.

El objetivo de esta sección es extender este operador a un operador que nos permita «*derivar*» formas diferenciales de grado arbitrario. Una de las razones fundamentales para introducir la derivada exterior es que proporciona un marco unificado para los principales operadores diferenciales del análisis vectorial clásico, y, más aún, permite formular el *teorema de Stokes* en toda su generalidad. Además, su definición es puramente geométrica: no requiere ninguna estructura adicional, y está intrínsecamente ligada a la topología de la variedad.

Teorema 2.10.128 (Derivada exterior)**.** *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe una única aplicación $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ que satisface:*

1. d *es $\mathbb{R}$-lineal.*

2. *Para toda función* $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $\mathrm{d}f$ *es la derivada exterior de* f.

3. $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

4. *Para toda* $\eta \in \Omega^k(M)$, *y* $\nu \in \Omega^l(M)$, *se tiene que*

$$\mathrm{d}(\eta \wedge \nu) = \mathrm{d}\eta \wedge \nu + (-1)^k \eta \wedge \mathrm{d}\nu .$$

A la aplicación $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ *se denomina* ***derivada exterior****. Para cada* $\eta \in \Omega^k(M)$, *a* $\mathrm{d}\eta$ *se le llama* ***derivada exterior de*** η.

Aunque la inclusión de esta prueba se sale de los objetivos de este proyecto docente, resulta de interés resaltar que durante la demostración se muestra, de hecho, cual es la versión local de derivada exterior. En particular, sea $\eta \in \Omega^k(M)$, con coordenadas locales $\eta_{i_1,\ldots,i_k}$ respecto a una carta local $\big(U, \varphi_U = \big(x^i\big)\big)$. Entonces, la **forma local** de $\mathrm{d}\eta$ viene dada por,

$$\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \frac{\partial\left(\eta_{i_1,\ldots,i_k}\right)}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} .$$

De esta manera, las coordenadas locales de la derivada exterior vienen dadas por,

$$(\mathrm{d}\eta)_{i_1,\ldots,i_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial\left(\eta_{i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_k}\right)}{\partial x^{i_j}} , \tag{2.21}$$

donde $\hat{i}_j$ denota la omisión de i_j, para cualquier $1 \le i_1 < \cdots i_{k+1} \le n$.

Definición 2.10.129. *Sea* M *una variedad diferenciable, y* $\eta \in \Omega^k(M)$. *Diremos que* η *es* ***cerrada*** *si* $\mathrm{d}\eta = 0$. *Diremos que* η *es* ***exacta*** *si existe una* $\nu \in \Omega^{k-1}(M)$ *tal que*

$$\eta = \mathrm{d}\nu .$$

En tal caso, ν *se denomina* ***potencial*** *de* η.

De esta manera, η es cerrada si sus coordenadas locales satisfacen

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial\left(\eta_{i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_k}\right)}{\partial x^{i_j}} = 0 , \tag{2.22}$$

para todo $1 \le i_1 < \cdots i_{k+1} \le n$. Notemos que, la condición 3 implica que *toda forma exacta es cerrada.* El estudio del recíproco es un problema ciertamente curioso; no es, necesariamente, verdad.

A posteriori se probará que, en ciertos abiertos del espacio euclídeo, toda forma cerrada es necesariamente exacta (*Lema de Poincaré*). Este hecho está estrechamente ligado con la construcción de potenciales para funciones diferenciables cuyo rotacional se anula (definición 2.10.130). Se intuye de esta manera que la obstrucción a que una forma cerrada sea exacta no es de naturaleza local, sino *global* y *topológica*. Así, la distinción entre lo cerrado y lo exacto se convierte en una de las claves para comprender el comportamiento global de una variedad diferenciable, y da pie al estudio de la llamada *cohomología de De Rham* ([16]). Nótese, por otra parte, que el potencial ν, de existir, no es único. En efecto, para cualquier $(k-1)$-forma cerrada θ, $\tilde{\nu} = \nu + \theta$ es otro potencial para η.

Este es un momento propicio para reflexionar sobre los paralelismos entre el tema que nos ocupa (*variedades*) y el espacio euclídeo. Hemos tratado con operadores como el *producto exterior* y la *derivada exterior* y, sin embargo, no se han discutido las nociones clásicas de *gradiente*, *rotacional* y *divergencia*. El motivo principal de este hecho es que *la derivada exterior unifica todos estos conceptos.*

Aunque se puede generalizar a dimensión arbitraria, por simplicidad, vamos a trabajar $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.10.130 (Rotacional de un campo de vectores)**.** *Sea $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$ con expresión en coordenadas*

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial r^i}\,.$$

Entonces, el ***rotacional de X*** *es el campo de vectores $\nabla \times X$ en $\mathbb{R}^3$ que viene dado por*

$$\nabla \times X = \left(\frac{\partial X^3}{\partial r^2} - \frac{\partial X^2}{\partial r^3}\right)\frac{\partial}{\partial r^1} + \left(\frac{\partial X^1}{\partial r^3} - \frac{\partial X^3}{\partial r^1}\right)\frac{\partial}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial X^2}{\partial r^1} - \frac{\partial X^1}{\partial r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r^3}\,.$$

Notemos que, dado que las coordenadas $\left(r^i\right)$ son globales, se puede definir el isomorfismo

$$\begin{aligned} \sharp : \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right) &\to \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right) \\ \eta_i \mathrm{d}r^i &\mapsto \eta_i \frac{\partial}{\partial r^i}\,, \end{aligned}$$

cuya inversa se denota por $\flat\colon \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right) \to \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. Observemos que este isomorfismo $\sharp$ transforma 1-formas en campos de vectores sin cambiar las coordenadas (*¿es posible hacer esto para cualquier variedad M?*).
Sea $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Observemos que las coordenadas de la diferencial de $\flat(X)$ son, salvo el orden, las coordenadas del rotacional de X. Así, $\nabla \times X$ está caracterizado por la identidad

$$\iota_{\nabla\times X}\left(\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3\right) = \mathrm{d}\left(\flat(X)\right)\,. \tag{2.23}$$

Es decir, *la derivada exterior juega, en el contexto de* 1*-formas, el mismo papel que el rotacional en el contexto de los campos de vectores.*

Definición 2.10.131 (Gradiente de una función)**.** *Sea* $f \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$*. Entonces, el **gradiente de f** es el campo de vectores dado por*

$$\operatorname{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r^i}\frac{\partial}{\partial r^i}\,.$$

En otras palabras, $\operatorname{grad}(f) = \sharp(\mathrm{d}f)$. Por lo tanto, *la información sobre el gradiente de una función viene dada por la derivada exterior de la misma.*

Definición 2.10.132 (Divergencia de un campo de vectores)**.** *Sea* $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *con expresión en coordenadas*

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial r^i}\,.$$

*La **divergencia de** X es la función dada por*

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X^i}{\partial r^i}\,.$$

De esta manera, es fácil comprobar que

$$\mathrm{d}\left(\iota_X\left(\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3\right)\right) = \operatorname{div}(X)\,\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3\,. \tag{2.24}$$

Por lo tanto, la divergencia de un campo de vectores X se obtiene al contraer $\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3$ por X y aplicar la derivada exterior. Así, estos tres conceptos (gradiente, rotacional, y divergencia) se caracterizan en $\mathbb{R}^3$ a través de la derivada exterior. *Este hecho puede dar cierta intuición del motivo por el cual el teorema de Stokes en variedades generaliza a los teoremas de Green, divergencia y Stokes clásicos.*

La propiedad 4 del definición 2.10.128 muestra cómo interactúan la derivada exterior y el producto exterior. Mostraremos así al estudiante el resto de correlaciones:

- **Derivada exterior y pullback:** Sean M y N dos variedades diferenciables, y $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. Entonces,

$$F^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ F^*\,.$$

- **Derivada exterior y contracción:** Se lidiará únicamente con casos particulares. A saber, en el ejercicio 2.55 se muestran las siguientes:

  i $\quad \iota_X \mathrm{d}f = X(f)\,,$

  ii) $\quad \varphi^*(\iota_X \alpha) = \iota_{(\varphi^{-1})_* X}(\varphi^* \alpha)\,,$

para cualesquiera $f \in \mathscr{C}^{\infty}(N)$, $X \in \mathfrak{X}(N)$, $\alpha \in \Omega(N)$ y cualquier difeomorfismo $\varphi\colon M \to N$.

2.7 Orientación y formas de volumen

En este punto del curso se introduce la noción de **orientación** de una variedad, una idea que, aunque formalmente se define mediante la existencia de ciertas formas diferenciales no degeneradas, puede entenderse de manera bastante intuitiva como la posibilidad de distinguir de forma coherente entre dos «*sentidos*» globales en la variedad. Esta noción resultará esencial para poder integrar de manera consistente sobre dominios de una variedad. En este contexto primero aparecen las llamadas *formas de volumen* que son formas diferenciales de grado máximo estrechamente relacionadas con la orientación que proporcionan un marco matemático adecuado para medir volúmenes. Estas nociones empiezan a preparar así el terreno para el teorema de Stokes, donde la orientación desempeña un papel fundamental.

Definición 2.10.133 (Forma de volumen)**.** *Sea M una variedad de dimensión n. Una **forma de volumen** es una n-forma diferencial que no se anula en ningún punto.*

Dada la dimensión del espacio de los $n-$covectores, la **forma local** de toda forma de volumen viene dada por

$$\eta = \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{2.25}$$

donde $\big(U, \varphi_U = \big(x^i\big)\big)$ es una carta local en M. Así, se dirige al estudiante, de manera natural, al siguiente resultado:

Corolario 2.10.134. *Sea M una variedad de dimensión n, y $\eta \in \Omega^n(M)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *η es una forma de volumen.*
2. *Para toda carta local $\big(U, \big(x^i\big)\big)$,*
$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \neq 0\,.$$
3. *Para todo punto $x \in M$, existe una base $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathsf{T}_x M$ tal que*
$$\{\eta(x)\}(v_1, \dots, v_n) \neq 0\,.$$
4. *Para todo punto $x \in M$, y para toda base $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathsf{T}_x M$, se tiene que*
$$\{\eta(x)\}(v_1, \dots, v_n) \neq 0\,.$$

En general, la existencia de formas de volumen sobre una variedad no está, generalmente, garantizada.

Definición 2.10.135 (Orientación)**.** *Sea M una variedad de dimensión n. Diremos que M es* ***orientable*** *si existe una forma de volumen sobre M.*

Generalmente, si una variedad M es orientable, fijaremos una forma de volumen Ω sobre M, que se denominará ***orientación*** de M. La noción de *orientación* proviene originalmente de la idea intuitiva de «*derecha*» e «*izquierda*», o más formalmente, de la posibilidad de distinguir dos clases de bases en $\mathbb{R}$: *aquellas que están orientadas hacia la derecha, y aquellas cuya orientación es hacia la izquierda.* Específicamente, la forma $\mathrm{d}t$ define una orientación sobre $\mathbb{R}$. Así, separa $\mathbb{R}$ es dos clases de vectores no nulos (o bases); aquellos que satisfacen que $\mathrm{d}t\,(v) > 0$ («*derecha*»), y aquellos que cumplen que $\mathrm{d}t\,(v) < 0$ («*izquierda*»). Esta idea, a la que se le dará rigor más adelante, muestra una intuición del motivo por el que la orientación de una variedad se define como una forma de volumen global sobre la variedad.

Fijada una orientación Ω sobre M, cualquier otra n-forma $\Theta \in \Omega^n\,(M)$ se escribe,

$$\Theta = f\Omega\,,$$

para alguna $f \in \mathscr{C}^\infty\,(M)$. Si $f > 0$ diremos que Θ está ***positivamente orientada***, o que tiene ***orientación positiva*** respecto a Ω; mientras que si $f < 0$ diremos que Θ está ***negativamente orientada***, o que tiene ***orientación negativa*** respecto a Ω. Notemos que, si Θ es una forma de volumen en M, entonces f no puede ser 0 en ningún punto y, por ello, únicamente caben dos posibilidades, o bien tiene orientación positiva respecto a Ω, o bien tiene orientación negativa respecto a Ω.

Se probará ahora un resultado que pretende preparar el terreno para, a posteriori, relacionar el concepto de orientación con la elección de determinados tipos de atlas sobre la variedad.

Teorema 2.10.136. *Sea M una variedad orientable de dimensión n con orientación Ω que satisface que $\partial M = \emptyset$ o $\dim\,(M) > 1$. Entonces, podemos recubrir M por cartas locales $\left\{\left(U_\alpha, \varphi_{U_\alpha} = (x^i_\alpha)\right)\right\}_{\alpha\in A}$ tales que, para cualesquiera $\alpha, \beta \in A$ con $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$, el determinante de la matriz jacobiana del cambio de cartas $\varphi_{U_\beta} \circ \varphi^{-1}_{U_\alpha}$ es positivo, y las derivadas parciales de las coordenadas locales satisfacen que*

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\right) > 0,\ \forall \alpha \in A\,.$$

Conviene, en este punto, aclarar que el recíproco también será cierto. Esto es, si podemos recubrir una variedad M por cartas locales $\{(U_\alpha, \varphi_{U_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ tales que los determinantes de los cambios de cartas $\varphi_{U_\beta} \circ \varphi^{-1}_{U_\alpha}$ son positivos, dondequiera que $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$, entonces se puede construir una forma de volumen global. Sin embargo, la prueba excede los propósitos de este texto (para una prueba de este resultado, véase [16]).

Es quizá este un buen momento para pararse a pensar detenidamente en el enunciado del teorema. Está claro que las únicas variedades (conexas) que se han excluido son los intervalos de la forma $[a,b)$, $(a,b]$, o $[a,b]$. ¿Cuál es el argumento de la prueba que no permite que la variedad M sea de este tipo? ¿Se te ocurre alguna manera de arreglar esto?

Definición 2.10.137. *Sea M una variedad orientable, con orientación Ω. Una carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ de M se dice que está* ***positivamente orientada****, o que tiene* ***orientación positiva****, si*

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) > 0\,.$$

Se dice que $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ está ***negativamente orientada****, o que tiene* ***orientación negativa****, si*

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) < 0\,.$$

Un atlas de M se dice que está ***positivamente orientado*** *o que tiene* ***orientación positiva*** *(respectivamente, que está* ***negativamente orientado*** *o que tiene* ***orientación negativa****) si todas las cartas locales que lo componen tienen orientación positiva (respectivamente, orientación negativa). Un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_{U_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ de una variedad M se dice* ***consistentemente orientado*** *si, para cualesquiera $\alpha, \beta \in A$ con $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$, el determinante de la matriz jacobiana del cambio de cartas $\varphi_{U_\beta} \circ \varphi_{U_\alpha}^{-1}$ es positivo.*

Observemos que, aunque la forma de volumen que define la orientación nos permite construir un atlas consistentemente orientado (en la mayoría de los casos), esta propiedad no depende de la orientación escogida. Dicho de otro modo, un atlas puede estar consistentemente orientado, hayamos fijado una orientación o no.

Proposición 2.10.138. *Sea M una variedad orientable. Dos cartas en M cuyos dominios tienen intersección no nula tienen la misma (respectivamente, distinta) orientación si el determinante de la matriz jacobiana del cambio de cartas es positivo (respectivamente, negativo).*

Demostración. Sea Ω la orientación de M. Dos cartas $\varphi_U = \left(x^i\right) : U \to \widehat{U}$ y $\varphi_V = \left(y^j\right) : V \to \widehat{V}$ sobre M, tales que $U \cap V \neq \emptyset$, satisfacen

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \det\left(J\left(\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}\right)\right) \Omega\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right)\,.$$

□

Por lo tanto, una manera sencilla de comparar la orientación de dos cartas diferentes es calcular el jacobiano del cambio de cartas.

Proposición 2.10.139. *Sea M una variedad orientable, y $\{(U_\alpha, \varphi_{U_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ un atlas con orientación positiva. Una carta local (U, φ_U) de M está positivamente orientada (respectivamente, negativamente orientada) si y solo si, para cada $\alpha \in A$ con $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$, el determinante de la matriz jacobiana del cambio de cartas $\varphi_U \circ \varphi_{U_\alpha}^{-1}$ es positivo (respectivamente, negativo).*

Demostración. La prueba se deja para el ejercicio 2.49. □

De esta manera, se puede determinar la orientación (positiva o negativa) de una carta local utilizando únicamente un atlas con orientación positiva.

Corolario 2.10.140. *Sea M una variedad orientable, con orientación Ω. Una forma de volumen Θ de M está positivamente orientada si y solo si*

$$\operatorname{sgn}\left(\Theta\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right),$$

para cualquier carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ en M. Análogamente, Θ de M está negativamente orientada si y solo si para cualquier carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ en M,

$$\operatorname{sgn}\left(\Theta\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right) \neq \operatorname{sgn}\left(\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right).$$

Resumiendo, una *orientación* sobre una variedad diferenciable viene dada una forma de volumen fijada, y esta elección nos permite decidir si una carta local, un atlas o una forma de volumen determinada tiene orientación positiva o negativa. Con esto, el teorema 2.10.136 se puede reescribir como sigue:

Teorema 2.10.141. *Si M es una variedad orientable tal que $\partial M = \emptyset$ o $\dim(M) > 1$, entonces existe un atlas de M con orientación positiva.*

Se presenta ahora un razonamiento que busca que el estudiante reflexione sobre el motivo por el que se ha excluido el caso dimensión 1, con borde no vacío.

Notemos que hemos excluido del definición 2.10.136 el caso en el que la dimensión de la variedad M es 1, y tiene borde no vacío. Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado, y consideremos la aplicación inclusión $i_{[a,b]} : [a,b] \hookrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, $\mathrm{d}i_{[a,b]}$ es una forma de volumen sobre $[a,b]$. Por otro lado, cualquier carta local alrededor de b se escribe como un difeomorfismo

$$\varphi : (c,b] \to [0,\bar{c}) \subseteq [0,+\infty) = \mathbb{H}^1\,,$$

con $\varphi(b) = 0$ (pues $\partial\mathbb{H}^1 = \{0\}$). En consecuencia, φ tiene que ser estrictamente decreciente y, por lo tanto, φ^{-1} también ha de serlo. Ahora bien, la expresión en coordenadas de $i_{[a,b]}$ es

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ i_{[a,b]} \circ \varphi^{-1}(u) = \varphi^{-1}(u)\,, \quad \forall\, u \in \varphi((c,b])\,,$$

de modo que

$$\mathrm{d}i_{[a,b]}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\bigg|_x = \frac{\partial i_{[a,b]}}{\partial\varphi}\bigg|_x = \frac{\partial\left(i_{[a,b]} \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial t}\bigg|_{\varphi(x)} = \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial t}\bigg|_{\varphi(x)} < 0\,, \quad \forall\, x \in (c,b]\,,$$

es decir, *toda carta local alrededor de b está negativamente orientada*. Por ende, *no existe ningún atlas positivamente orientado en* $[a,b]$ con la orientación $\mathrm{d}i_{[a,b]}$. Análogamente, podemos demostrar que toda carta alrededor de a es estrictamente creciente y, por lo tanto, está positivamente orientada.

Es más, cualquier otra forma de volumen Θ en $[a,b]$ se escribe como

$$\Theta \;=\; f\mathrm{d}i_{[a,b]},\ \text{con}\ \ f > 0 \text{ o } f < 0\,.$$

Por lo tanto, si $f > 0$ toda carta local alrededor de b está negativamente orientada respecto a Θ, mientras que si $f < 0$ toda carta local alrededor de b está positivamente orientada respecto a Θ. En resumen, independientemente de la orientación fijada, *no podemos obtener dos cartas alrededor de b con orientaciones diferentes* y, debido a esto, no podemos cambiar la orientación de la carta utilizando el truco de la demostración del definición 2.10.136 (allí esto se consigue cambiando el signo de x^1). Es decir, **no existe ningún atlas consistentemente orientado sobre un intervalo compacto de la recta real**. No obstante, sí que hemos probado lo siguiente:

Teorema 2.10.142. *Si $M = [a, b)$ o $M = (a, b]$, entonces existe un atlas de M consistentemente orientado.*

Demostración. La demostración se deja para el ejercicio 2.48. □

Es este momento sería aconsejable dedicar algo de tiempo a reflexionar sobre las nociones introducidas. En particular, las k-formas se introdujeron como objetos que generalizan a 1-formas, de tal manera que se pueden evaluar en k campos de vectores. Siendo así, ¿por qué nos quedamos con aquellos k-tensores que son «alternantes»? ¿No tendría más sentido tomar los k-tensores covariantes (sin ninguna condición añadida)?

Orientación inducida

En esta última parte del tema se utilizarán los operadores definidos para tratar el siguiente problema:

Sea M una variedad orientable de dimensión n, con orientación Ω. Entonces, $\mathring{M}$ y ∂M son variedades de dimensiones n y $n-1$, respectivamente. ¿Heredan $\mathring{M}$ y ∂M la orientabilidad de M?

Recordemos que $\mathring{M}$ es un abierto de M y, por lo tanto,

$$\mathsf{T}_x\mathring{M} = \mathsf{T}_x M, \ \forall x \in \mathring{M} .$$

Así, el *pullback* $i^*_{\mathring{M}}\Omega$, donde $i_{\mathring{M}} : \mathring{M} \hookrightarrow M$ es la aplicación inclusión, es una forma de volumen sobre $\mathring{M}$. De esta manera, $\mathring{M}$ *es una variedad orientable de dimensión M, con orientación $i^*_{\mathring{M}}\Omega$.*

Con la frontera el problema se vuelve algo más complicado: si $i_{\partial M} : \partial M \hookrightarrow M$ es la aplicación inclusión, ¿podemos afirmar que $i^*_{\partial M}\Omega$ es una forma de volumen sobre ∂M? Más específicamente, ¿$i^*_{\partial M}\Omega$ se podría anular en algún punto?

La respuesta es que obviamente *no*, $i^*_{\partial M}\Omega$ no es una forma de volumen. De hecho, por una cuestión de grado (Ω es una n-forma y ∂M tiene dimensión $n-1$), tiene que ocurrir que

$$i^*_{\partial M}\Omega \equiv 0 .$$

En otras palabras, si buscamos solucionar esta cuestión, debemos ser algo más creativos. **Así, se empezará presentando al estudiante un caso particular,**

para que pueda intuir como se resuelve este problema.

Sea $M = \mathbb{H}^2$. Cualquier orientación (o forma de volumen) sobre $\mathbb{H}^2$ viene dada por

$$\Omega = f\left(r^1, r^2\right) \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \,,$$

con $f \neq 0$ en todo punto. Dado que el borde de $\mathbb{H}^2$ viene caracterizado por la condición $r^2 = 0$, uno podría entonces intuir que la 1-forma dada por

$$\hat{\Omega} = f\left(r^1, 0\right) \mathrm{d}r^1$$

es una forma de volumen sobre $\partial\mathbb{H}^2$. La cuestión entonces sería: ¿cómo podemos obtener $\hat{\Omega}$ partiendo de Ω sin utilizar su forma local?

Observemos primero que la función que acompaña a $\mathrm{d}r^1$ no es más que $f \circ i_{\partial\mathbb{H}^2}$. Así pues, el *pullback* de la inclusión debería jugar algún papel. Por otro lado, una manera sencilla de quedarnos con $\mathrm{d}r^1$ es contraer por el campo de vectores $-\frac{\partial}{\partial r^2}$,

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r^2}} \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 = \mathrm{d}r^1 \,.$$

Luego, quedará

$$\hat{\Omega} = i^*_{\partial\mathbb{H}^2}\left(\iota_{-\frac{\partial}{\partial r^2}} \Omega\right) \,. \tag{2.26}$$

Estudiemos, entonces, la manera de generalizar el desarrollo planteado. Notemos que el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial r^2}$ tiene una propiedad interesante: es tangente a $\mathbb{H}^2$, pero no a $\partial\mathbb{H}^2$, i.e., para todo $x \in \partial\mathbb{H}^2$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial r^2}\right|_x \in \mathsf{T}_x\mathbb{H}^2 \setminus \mathsf{T}_x\partial\mathbb{H}^2 \,.$$

Definición 2.10.143. *Sea M una variedad diferenciable, $x \in \partial M$ y $v_x \in \mathsf{T}_x M \setminus \mathsf{T}_x\partial M$. Entonces, se dice que v_x es **exterior** (respectivamente, **interior**) a ∂M si existe un camino diferenciable $\alpha : (-\epsilon, 0] \to M$ (respectivamente, $\alpha : [0, \epsilon) \to M$), con $\epsilon > 0$, tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v_x$. Un campo de vectores en M se dice que es **exterior** (respectivamente, **interior**) a ∂M si $X(x)$ es exterior (respectivamente, interior) a ∂M para todo $x \in \partial M$.*

Se le mostrará ahora al estudiante un desarrollo que ayudará al estudiante a entender la intuición que subyace a las nociones de vectores externos e internos y, además, será de utilidad más adelante.

Teorema 2.10.144. *Sea M una variedad diferenciable, $x \in \partial M$ y $v_x \in \mathsf{T}_x M \setminus \mathsf{T}_x\partial M$. Entonces, v_x es exterior (respectivamente, interior) a ∂M si y solo si $v_x(x^n) < 0$ (respectivamente, $v_x(x^n) > 0$) para cualquier $\left(U, \left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ una carta local de M.*

De este modo, grosso modo, *un campo de vectores es exterior a ∂M si y solo si su coordenada n-ésima X^n es estrictamente menor que 0 para todo punto de ∂M, para cualquier carta local $\left(U, \left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ de M.*

Ejemplo 2.10.145. Consideremos la variedad bidimensional $M = \mathbb{H}^2$ con coordenadas canónicas (x, y), cuyo borde es $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times \{0\}$. En general, cualquier campo de vectores exterior (respectivamente, interior) es de la forma

$$X = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\,,$$

donde g es una función suave tal que $g(x, 0)$ es estrictamente negativa (respectivamente, estrictamente positiva), y f es una función suave arbitraria. La figura 2.27 muestra un posible campo de vectores interior y otro exterior.

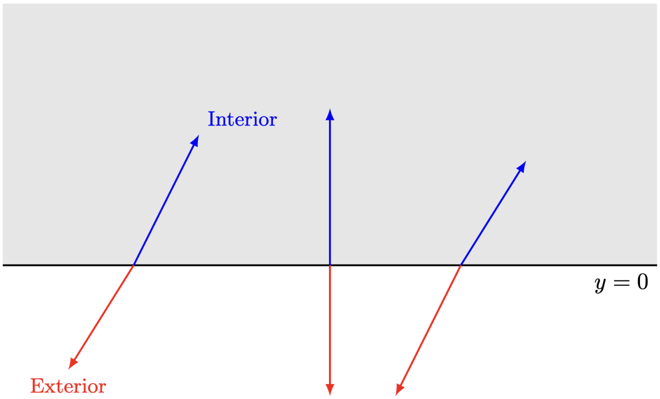


Figura 2.27: Campo de vectores interior y exterior en $\mathbb{H}^2$.

$\diamondsuit$

Se presentarán ejemplos más complejos para que el estudiante comprenda mejor como construir este tipo de campos y, seguidamente, se probará el siguiente teorema, crucial para la respuesta a la pregunta inicial de esta sección.

Teorema 2.10.146. *Sea M una variedad orientable con borde de dimensión n, con orientación Ω. Entonces, todo campo de vectores X exterior o interior a ∂M determina una orientación sobre ∂M, dada por*

$$i^*_{\partial M}\left(\iota_X \Omega\right)\,,$$

donde $i_{\partial M} : \partial M \hookrightarrow M$ es la aplicación inclusión.

Así, en consonancia con la intuición mostrada en la ecuación (2.26), este teorema prueba que si M es una variedad orientable, con orientación Ω, todo campo de vectores X exterior o interior a ∂M induce una orientación en ∂M, que se llamará ***orientación inducida por X***, y se denotará por Ω_X. **De esta manera, de forma orgánica, el estudiante puede ir de la intuición**

mostrada al inicio a la concreción de la solución mostrada en este teorema.

Resulta natural preguntarse entonces si la existencia de campos de vectores (no nulos) globales sobre M exteriores o interiores a ∂M está garantizada. En general, esta afirmación es cierta [16], aunque en este texto nos enfocaremos únicamente en resolver el problema para variedades compactas (véase teorema 2.10.153 de la siguiente sección).

Teorema 2.10.147. *Sea M una variedad orientable con borde de dimensión n, con orientación Ω. Sean X e Y dos campos de vectores ambos exteriores o ambos interiores. Entonces, una carta local de ∂M está positivamente orientada (respectivamente, negativamente orientada) respecto a Ω_X si y solo si está positivamente orientada (respectivamente, negativamente orientada) respecto a Ω_Y.*

La importancia de este tipo de campos de vectores, así como de los resultados probados, radica en la construcción de la integral sobre variedades. En particular, *nos permitirá integrar sobre el borde de una variedad orientable*. Observemos que, **aunque no tiene sentido incluir en este proyecto docente la demostración completa de este resultado, sí resulta conveniente mostrar la expresión local de Ω_X, que desempeña un papel esencial en la prueba**. En particular, si $\left(U, \left(x^1, \ldots, x^n\right)\right)$ es una carta local de una variedad M que tiene intersección no nula con la frontera ∂M, entonces

$$\Omega_X = (-1)^{n-1} X^n \, \Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1} \,. \tag{2.27}$$

Aquí se aprecia claramente el papel que juega la última coordenada de X en el signo de Ω_X.

2.8 Ejercicios

Ejercicio 2.23

Sean M y N dos variedades diferenciables. Demostrar que una función $F : M \to N$ es diferenciable en $x \in M$ si y solo si existe una carta local (U, φ_U) alrededor de $x \in U$, y una carta local (V, ψ_V) sobre $F(x) \in V$ tal que $\psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_U(x)$.

Ejercicio 2.24

Sea M una variedad. Demostrar que la identidad $\mathrm{Id}_M \colon M \to M$ es diferenciable en todo el dominio. Probar que una carta local de M es diferenciable con inversa diferenciable si y solo si pertenece a la estructura diferenciable de M.

Ejercicio 2.25

Sea M una variedad diferenciable. Comprobar que $\mathscr{C}^\infty(M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión infinita. Demostrar que $\mathscr{C}^\infty(M)$ es un anillo conmutativo, con la suma y el producto dados por

$$\begin{aligned} f + g \colon M \ni x \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}\,, \\ f \cdot g \colon M \ni x \mapsto f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26

Sean $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{S}^n_r$, la n-esfera de radio 1 y centro 0, y la n-esfera de radio $r > 1$ y centro 0 (ejemplo 2.10.84), respectivamente. Considérese la función $F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n_r$ dada por

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{sgn}(x_n) \left| \sqrt{r^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right| \right),$$

donde $\operatorname{sgn}(x_n)$ es el signo de x_n. Comprobar que F es diferenciable.

Ejercicio 2.27

Sean $M_1, \ldots, M_{k-1}$ variedades diferenciables sin borde, y M_k una variedad diferenciable (con o sin borde). Comprobar que las siguientes aplicaciones son diferenciables:

1. **Proyección i-ésima:** $\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$, dada por

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i\,.$$

2. **Inclusión de M_i en $M_1\times\cdots\times M_k$ a la altura de $\left(x_1^0,\ldots,x_k^0\right)\in M_1\times\cdots\times M_k$:** $i_{\left(x_1^0,\ldots,x_k^0\right)}: M_i \hookrightarrow M_1\times\cdots\times M_k$, dada por

$$i_{\left(x_1^0,\ldots,x_k^0\right)}(x)=\left(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x,x_{i+1}^0,\ldots,x_k^0\right) .$$

Ejercicio 2.28

Sea M una variedad diferenciable. Probar que todas las cartas locales de la estructura diferenciable son difeomorfismos.

Ejercicio 2.29

Sea $\alpha: I\to M$ un camino diferenciable en M, con I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $t_0\in I$. Probar que el funcional dado por $\alpha'(t_0)$ es una derivación en $\alpha(t_0)$.

Ejercicio 2.30

Sean $M_1,\cdots,M_{k-1}$ variedades diferenciables sin borde, y M_k una variedad diferenciable (con o sin borde). Probar que el espacio tangente de la variedad producto es isomorfo al producto de los espacios tangentes, esto es,

$$\mathsf{T}_{(x_1,\ldots,x_k)}(M_1\times\cdots\times M_k)\cong \mathsf{T}_{x_1}M_1\times\cdots\times\mathsf{T}_{x_k}M_k .$$

Ejercicio 2.31

Sea $\left(U,\left(x^1,\ldots,x^n\right)\right)$ una carta local en M con $x\in U$. Probar que, para cada i, el covector $\mathrm{d}x^i\big|_x:\mathsf{T}_xM\to\mathbb{R}$ viene dado por

$$\mathrm{d}x^i\big|_x(v_x)=v_x\left(x^i\right),\ \forall v_x\in\mathsf{T}_xM . \tag{2.28}$$

Ejercicio 2.32

Sea M una variedad de dimensión n, $x\in M$, y $\left(U,\left(x^1,\ldots,x^n\right)\right)$ una carta local en M, con $x\in U$. Se han definido los covectores $\mathrm{d}x^i\big|_x$ en x como la base dual de las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x$. Demostrar que, de hecho, $\mathrm{d}x^i\big|_x$ es la derivada exterior de x^i en x, para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Ejercicio 2.33

Sea $U\subseteq M$ un abierto de M. Entonces, U tiene estructura de variedad diferenciable heredada de M (ejercicio 2.9). Probar que la inclusión $i_U: U\hookrightarrow M$ es una aplicación diferenciable y que, para todo $x\in U$, la diferencial T_xi_U es la aplicación identidad.

Ejercicio 2.34

Sean $M_1, \ldots, M_{k-1}$ variedades diferenciables sin borde, y M_k una variedad diferenciable (con o sin borde). Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, considérese la proyección i-ésima, $\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ definida en el ejercicio 2.27. Comprobar que, para todo $(x_1, \ldots, x_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$, se tiene que $\mathsf{T}_{(x_1,\cdots,x_k)}\pi_i \colon \mathsf{T}_{x_1}M_1 \times \cdots \times \mathsf{T}_{x_k}M_k \to \mathsf{T}_{x_i}M_i$ es también la proyección i-ésima, es decir,

$$\mathsf{T}_{(x_1,\cdots,x_k)}\pi_i\,(v_1, \ldots, v_k) = v_i\,,$$

para todo $(v_1, \ldots, v_k) \in \mathsf{T}_{x_1}M_1 \times \cdots \times \mathsf{T}_{x_k}M_k$.

Nota: Se está identificando $\mathsf{T}_{(x_1,\ldots,x_k)}\,(M_1 \times \cdots \times M_k)$ con $\mathsf{T}_{x_1}M_1 \times \cdots \times \mathsf{T}_{x_k}M_k$, en base al ejercicio 2.30.

Ejercicio 2.35

Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable, y $\alpha : I \to M$ un camino diferenciable en M. Demostrar que la composición $F \circ \alpha$ es un camino diferenciable en N, y que

$$(F \circ \alpha)'\,(t_0) = \mathsf{T}_{\alpha(t_0)}F\,(\alpha'\,(t_0))\ ,\ \forall\, t_0 \in I\,.$$

Ejercicio 2.36

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por

$$F(x, y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right),$$

y sea el camino dado por $\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t)$. Considera $\alpha'(0) \in \mathsf{T}_{(0,0)}\mathbb{R}^2$.

1. Calcula $\mathsf{T}_{(0,0)}F$.
2. Calcula $\mathsf{T}_{(0,0)}F(\alpha'(0))$.

Ejercicio 2.37

Sea $M = \mathbb{R}^2$, y considera las coordenadas cartesianas (x, y) y polares (r, θ), con la transformación:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Sea $v \in \mathsf{T}_{(1,0)}\mathbb{R}^2$ tal que

$$v = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(1,0)}.$$

1. Expresa este vector en coordenadas polares.
2. ¿Podemos hacer lo mismo en el $(0, 0)$?

Ejercicio 2.38

Sea M una variedad diferenciable, y una aplicación $X : M \to \mathsf{T}M$. Demostrar que X es un campo de vectores si y solo si para todo abierto $U \subseteq M$, la restricción $X|_U : U \to \mathsf{T}U$ es un campo de vectores.

Ejercicio 2.39

Probar que dada una carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ de M, las aplicaciones

$$x \in U \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$$

son campos de vectores locales.

Ejercicio 2.40

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, y un difeomorfismo $F : M \to N$. Demostrar que, para todo $f \in \mathscr{C}^\infty(N)$, se cumple que

$$F_* X(f) = \left\{X \circ F^{-1}\right\}(f \circ F)$$

Ejercicio 2.41

Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$, un difeomorfismo $F : M \to N$, una carta local $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ de M, y otra carta local arbitraria $\left(V, \psi_V = \left(y^j\right)\right)$ de N. Probar que

$$F_* X(y) = X\left(F^{-1}(y)\right)\left(x^i\right) \left.\frac{\partial\left(y^j \circ F\right)}{\partial x^i}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_y$$

Demostrar que, en consecuencia, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$\left\{F_* X\left(y^j\right)\right\}(y) = X\left(F^{-1}(y)\right)\left(x^i\right) \left.\frac{\partial\left(y^j \circ F\right)}{\partial x^i}\right|_{F^{-1}(y)}$$

En otras palabras, a grandes rasgos, las coordenadas locales de $F_* X$, respecto de la carta local (V, ψ_V) de N, se calculan multiplicando las coordenadas locales de X, respecto de la carta local (U, ψ_U) de M, por el jacobiano de $\psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1}$.

Ejercicio 2.42

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, y un k-tensor covariante $T : V \times \stackrel{k)}{\cdots} \times V \to \mathbb{R}$. Probar que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. T es alternante.
2. Para todo vector $v_l \in V$, con $l = 1, \ldots, n$, y toda permutación σ de $\{1, \ldots, k\}$,

$$T\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, T(v_1, \ldots, v_k)\ , \tag{2.29}$$

donde $\operatorname{sgn}(\sigma)$ se refiere al ***signo de la permutación***, es decir, es igual a 1 si es par (puede ser escrita como una composición de un número par de permutaciones), y -1 si es impar (puede ser escrita como una composición de un número impar de permutaciones).

Ejercicio 2.43

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, y T un n-tensor alternante en V. Demostrar que, para toda aplicación lineal $L : V \to V$, se tiene que

$$T(L(v_1), \ldots, L(v_n)) = \det(L)\, T(v_1, \ldots, v_n)\,,$$

para todo $v_1, \ldots, v_n$, y donde $\det(L)$ representa el determinante de una matriz asociada a L respecto a una base de V.

Pista: La fórmula general para el cálculo de determinantes viene dada por

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{2.30}$$

donde S_n es espacio de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$.

Ejercicio 2.44

Demostrar que el producto exterior es *bilineal* y *asociativo* para cada punto x de una variedad M. Es decir,

1. Para cada $\eta_x, \eta'_x \in \bigwedge^k (\mathsf{T}^*_x M)$, $\nu_x, \nu'_x \in \Lambda^l (\mathsf{T}^*_x M)$, y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \eta_x \wedge (\lambda \nu_x + \mu \nu'_x) &= \lambda (\eta_x \wedge \nu_x) + \mu (\eta_x \wedge \nu'_x) \\ (\lambda \eta_x + \mu \eta'_x) \wedge \nu_x &= \lambda\ (\eta_x \wedge \nu_x) + \mu (\eta'_x \wedge \nu_x) \end{aligned}$$

2. Para todo $\eta_x \in \bigwedge^k (\mathsf{T}^*_x M)$, $\nu_x \in \Lambda^l (\mathsf{T}^*_x M)$, y $\omega_x \in \Lambda^r (\mathsf{T}^*_x M)$,

$$\eta_x \wedge (\nu_x \wedge \omega_x) = (\eta_x \wedge \nu_x) \wedge \omega_x$$

Ejercicio 2.45

Comprobar que para todo $\eta_x \in \bigwedge^k (\mathsf{T}_x^* M)$ y $\nu_x \in \Lambda^l (\mathsf{T}_x^* M)$, se tiene que

$$\eta_x \wedge \nu_x = (-1)^{kl} \nu_x \wedge \eta_x \,.$$

Utilizar este hecho para comprobar que

$$\eta_x \wedge \eta_x = 0 \,, \quad \text{si } k \text{ es impar} \,.$$

Ejercicio 2.46

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $x \in M$. Demostrar que $\bigwedge^k (\mathsf{T}_x^* M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $\binom{n}{k}$.

Ejercicio 2.47

Comprobar que el producto exterior es multilineal. Dicho de otro modo, para todo $f, g \in \mathscr{C}^\infty (M)$, $\nu_1, \nu_2 \in \Omega^k (M)$, y $\eta \in \Omega^l (M)$, se tiene que

$$(f\nu_1 + g\nu_2) \wedge \eta = f\nu_1 \wedge \eta + g\nu_2 \wedge \eta \,.$$

Ejercicio 2.48

Considerar las variedades dadas por los intervalos semicerrados $[a, b)$ y $(a, b]$, y sean las formas de volumen dadas por $\mathrm{d}i_{[a,b)}$ y $\mathrm{d}i_{(a,b]}$, donde $i_{[a,b)} : [a, b) \hookrightarrow \mathbb{R}$ e $i_{(a,b]} : (a, b] \hookrightarrow \mathbb{R}$ son las respectivas inclusiones. Demostrar que existen sendos atlas consistentemente orientados para $[a, b)$ y para $(a, b]$. Comprobar además que todas las cartas consistentemente orientadas de $[a, b)$ están positivamente orientadas respecto a $\mathrm{d}i_{[a,b)}$, mientras que todas las cartas consistentemente orientadas de $(a, b]$ están negativamente orientadas respecto a $\mathrm{d}i_{(a,b]}$.

Ejercicio 2.49

Probar que, dada una variedad orientable M y un atlas con orientación positiva $\{(U_\alpha, \varphi_{U_\alpha})\}_{\alpha \in A}$, una carta local (U, φ_U) de M está positivamente orientada (respectivamente, negativamente orientada) si y solo si, para cada $\alpha \in A$ con $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$, el determinante de la matriz jacobiana del cambio de cartas $\varphi_U \circ \varphi_{U_\alpha}^{-1}$ es positivo (respectivamente, negativo).

Ejercicio 2.50

Sea M una variedad diferenciable, y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que

$$\iota_X \circ \iota_X \equiv 0 \,.$$

Ejercicio 2.51

Sea M una variedad diferenciable, y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Demostrar que para cada $\nu \in \Omega^l(M)$, y $\eta \in \Omega^k(M)$, se tiene que

$$\iota_X(\eta \wedge \nu) = (\iota_X \eta) \wedge \nu + (-1)^k \eta \wedge (\iota_X \nu) .$$

Pista: Probar primero que el resultado se satisface para l-formas dadas por el producto exterior de 1-formas, es decir, para cada $\eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k \in \Omega^k(M)$, y $\nu = \eta_{k+1} \wedge \cdots \wedge \eta_{k+l} \in \Omega^l(M)$, se satisface que

$$\iota_X(\eta \wedge \nu) = (\iota_X \eta) \wedge \nu + (-1)^k \eta \wedge (\iota_X \nu)$$

Después se puede utilizar que toda r-forma se escribe, localmente, como combinación lineal de r 1-formas $(\mathrm{d}x^i)$.

Ejercicio 2.52

Sea $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ una carta local de una variedad M, y $\eta \in \Omega^k(M)$. Probar que

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \eta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq n} (-1)^{r_i - 1} \eta_{i_1, \ldots i_{r_i - 1}, i, i_{r_i} \ldots, i_{k-1}} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{k-1}} .$$

Ejercicio 2.53

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y $\left(U, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$, $\left(V, \psi_V = \left(y^j\right)\right)$ dos cartas locales en M con $U \cap V \neq \emptyset$. Probar que se satisface la siguiente fórmula de cambio de coordenadas:

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \det\left(J\left(\varphi_U \circ \psi_V^{-1}\right)\right) \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n .$$

Ejercicio 2.54

Probar la identidad (2.24),

$$\mathrm{d}\left(\iota_X\left(\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3\right)\right) \;=\; \operatorname{div}(X)\, \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3 .$$

Utilizar esta, y las demás identidades para probar, de manera inmediata, que la divergencia del rotacional y el rotacional del gradiente son 0.

Ejercicio 2.55

Probar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} &\iota_X \mathrm{d}f = X(f) , \\ &\varphi^*(\iota_X \alpha) = \iota_{(\varphi^{-1})_* X}(\varphi^* \alpha) , \end{aligned}$$

para cualesquiera $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega(N)$ y cualquier difeomorfismo $\varphi \colon M \to N$.

Ejercicio 2.56

Determinar si las siguientes 1-formas diferenciales en $\mathbb{R}^2$ son exactas. Para aquellas que lo sean, hallar una función cuya diferencial sea la 1-forma en cuestión:

I) $3y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$,

II) $y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$,

III) $-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$,

IV) $e^x y\mathrm{d}x + e^x\mathrm{d}y$.

Ejercicio 2.57

Calcular la derivada exterior de las siguientes formas diferenciales en $\mathbb{R}^3$ con coordenadas canónicas (x, y, z):

I) $xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + 2x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$,

II) $z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (z^2 + 2y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$,

III) $13x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z$,

IV) $e^x \cos y\mathrm{d}x - e^x \sin y\mathrm{d}y$,

V) $x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Ejercicio 2.58

Dadas las 1-formas $\alpha = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, $\beta = z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$ y $\gamma = xy\mathrm{d}z$, calcular:

I) $\alpha \wedge \beta$,

II) $\alpha \wedge \gamma$,

III) $\beta \wedge \gamma$,

IV) $(\alpha + \beta + \gamma) \wedge (\alpha + \beta + \gamma)$,

V) $\mathrm{d}\alpha$,

VI) $\mathrm{d}\beta$,

VII) $\mathrm{d}\gamma$,

VIII) $\mathrm{d}(x\alpha)$

Ejercicio 2.59

Sea M una variedad de dimensión $2n$ y ω una 2-forma cerrada.

I) Comprobar que $\omega^n = \omega \wedge \cdots^{n)} \cdots \wedge \omega$ es una forma de volumen si y solo si para cada $x \in M$, la aplicación $\mathsf{T}_x M \ni v \mapsto \iota_v \omega_x \in \mathsf{T}^*_x M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

II) Asumamos que ω^n es una forma de volumen. Para una función $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ arbitraria, sea X_f el único campo de vectores dado por $\iota_{X_f(x)}\omega(x) = \mathrm{d}f(x)$ para cada $x \in M$. Sean $(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n)$ coordenadas locales en M tales que $\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y_i$. Calcular la expresión en dichas coordenadas del campo de vectores X_f. Demostrar, sin usar coordenadas, que $X_f(f) = 0$.

Nota: Una 2-forma cerrada ω en M tal que ω^n es una forma de volumen recibe el nombre de **forma simpléctica** en M. El campo de vectores X_f se denomina **campo hamiltoniano** de f.

Ejercicio 2.60

Sea M una variedad de dimensión $2n+1$ y η una 1-forma sobre M.

I) Comprobar que $\eta \wedge \mathrm{d}\eta^n$ es una forma de volumen si y solo si para cada $x \in M$, la aplicación $\mathsf{T}_x M \ni v \mapsto (\iota_v \eta_x)\eta_x + \iota_v \mathrm{d}\eta_x \in \mathsf{T}^*_x M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

II) Asumamos que $\eta \wedge \mathrm{d}\eta^n$ es una forma de volumen. Sean $(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n, z)$ coordenadas locales en M tales que $\eta = \mathrm{d}z - y_i \mathrm{d}x^i$. Sea R el único campo de vectores dado por

$$R \in \ker \mathrm{d}\eta \,, \quad \iota_R \eta = 1 \,. \tag{2.31}$$

Obtener la expresión en coordenadas de R.

Nota: Una 1-forma η en M tal que $\eta \wedge \mathrm{d}\eta^n$ es una forma de volumen recibe el nombre de **forma de contacto** en M. El campo de vectores R se denomina **campo de Reeb**.

Tema 3.- Cálculo integral

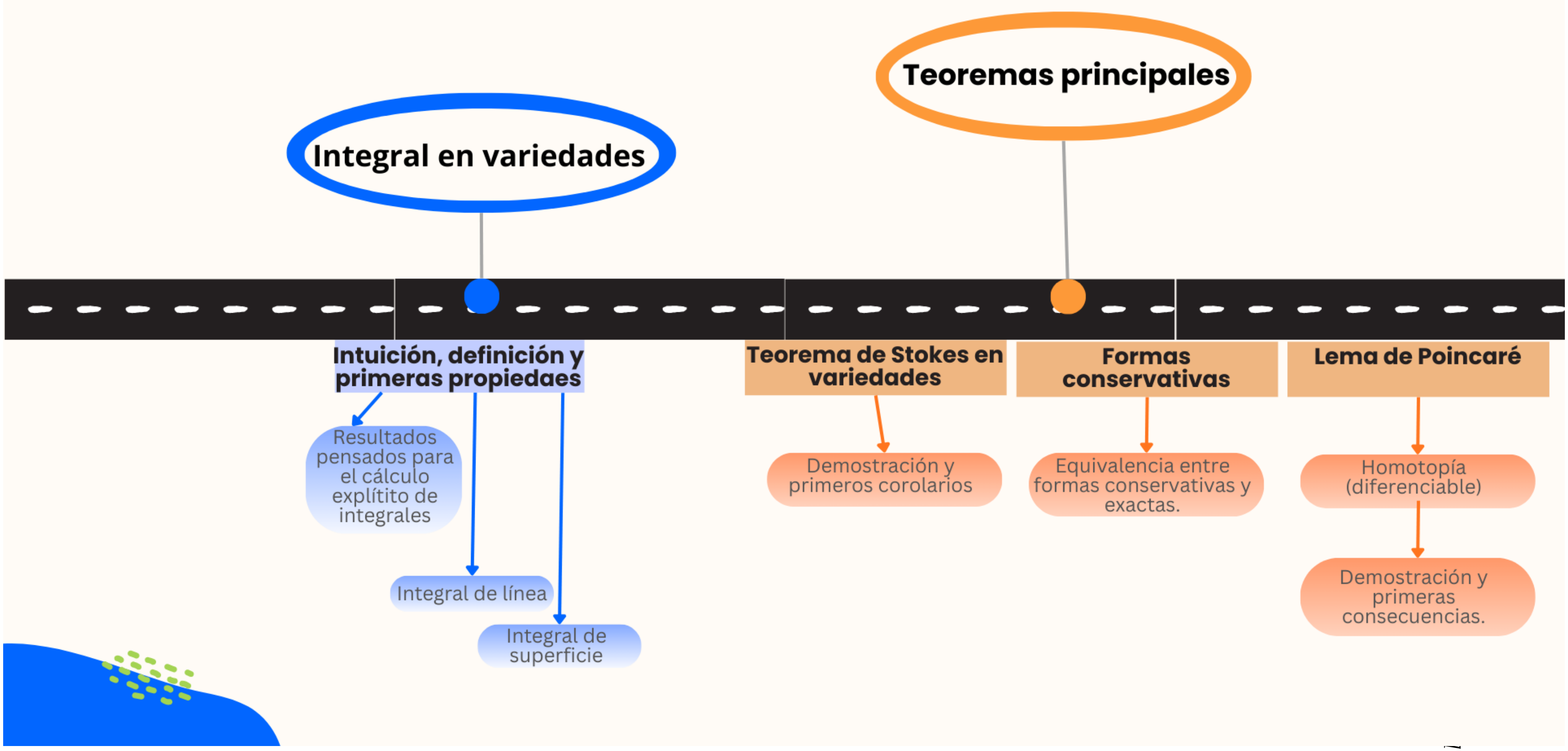
En este último tema se generaliza, al fin, el cálculo integral del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ a variedades, ampliando los horizontes del análisis clásico y facilitando el estudio de estructuras geométricas más complejas.

Para entender la intuición que subyace tras la integración en variedades, podría ser útil comenzar con una analogía familiar. En el cálculo clásico sobre el espacio euclídeo, integramos *funciones* sobre intervalos de la recta real, *áreas* en el plano y *volúmenes* en el espacio tridimensional. En cada caso, estamos sumando «*infinitesimales*» de longitud, área o volumen. De manera similar, en una variedad, integramos «*infinitesimales*» de una forma diferencial sobre una región de la variedad. Consideremos, a modo ilustrativo, una curva en el plano, que es un ejemplo sencillo de una variedad unidimensional. La longitud de la curva se puede calcular integrando la forma diferencial $\mathrm{d}t$, que representa un «*pequeño elemento de longitud*» a lo largo de la curva. Ahora, añadiendo un poco más de abstracción, imaginemos una superficie en el espacio tridimensional. El área de esta superficie se puede calcular integrando la forma diferencial $\mathrm{d}S$, que, de nuevo, representa un «*pequeño elemento de área*» en la superficie. Es decir, en ambos casos se tratará de integrar una determinada forma de volumen sobre la variedad.

Entre otros resultados, cabe destacar que en este tema se demuestra uno de los teoremas principales de la asignatura: el *teorema de Stokes en variedades*. Asimismo, se presenta la noción de homotopía diferenciable y se prueba el *lema de Poincaré*. **La importancia de estos resultados en diversas áreas de las matemáticas se mostrará al estudiante en el apéndice sobre aplicaciones**.

La estructura y el resumen de las ideas clave de estos dos subbloques se muestran en los siguientes diagramas:

Cálculo integral



Recurso visual que muestra la estructura global del tercer tema.

3.1 Integral en variedades

Iniciaremos este tema discutiendo con el estudiante sobre qué «*objetos*» serán susceptibles de ser integrados.

Uno podría pensar que la integral debería ser construida, *a priori*, sobre funciones reales definidas sobre la variedad. Por simplicidad, supongamos que M es una variedad diferenciable que puede ser cubierta por una única carta global $\varphi : M \to \mathbb{K}^n$. Dado que sabemos cómo integrar funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, podría parecer natural que la integral de una función $f : M \to \mathbb{R}$ sea igual a la integral de la función $\left[\varphi^{-1}\right]^* f = f \circ \varphi^{-1}$, es decir,

$$\int_M f = \int_{\varphi(M)} \left[\varphi^{-1}\right]^* f = \int_{\varphi(M)} \left(f \circ \varphi^{-1}\right) .$$

Observemos que, sea cual sea la definición de integral, esta debería ser un concepto *intrínseco a la variedad*. En otras palabras, no puede depender de la carta escogida. Así, dada otra carta global $\psi : M \to \mathbb{K}^n$, se tiene que cumplir que

$$\int_{\psi(M)} \left(f \circ \psi^{-1}\right) = \int_M f = \int_{\varphi(M)} \left(f \circ \varphi^{-1}\right) .$$

Ahora bien, tomemos la función idénticamente 1. Entonces,

$$\int_{\varphi(M)} \left(1 \circ \varphi^{-1}\right) = \int_{\varphi(M)} 1 = \int_{\psi(M)} 1 = \int_{\psi(M)} \left(1 \circ \psi^{-1}\right),$$

es decir, el volumen de $\varphi(M)$ es igual al volumen de $\psi(M)$. Por supuesto, resulta obvio que esto no tendría por qué ocurrir para cualesquiera cartas φ y ψ. Tomemos, por ejemplo, el intervalo abierto $M = (a, b)$, la primera carta φ igual a la inclusión i del intervalo (a, b) en $\mathbb{R}$, y la segunda carta ψ puede ser cualquier «*dilatación*» del intervalo (a, b), esto es, $\psi = \alpha \cdot i$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Veamos que resulta más natural definir la integral sobre formas de grado máximo. Para mayor claridad, comencemos asumiendo que nuestra variedad viene dada por un abierto precompacto U de $\mathbb{K}^n$, y que ω es una n-forma sobre U. Consideremos U como una variedad orientable, con orientación $\Omega = \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n$, donde $\left(r^1, \ldots, r^n\right)$ son las coordenadas canónicas globales de $\mathbb{K}^n$ restringidas a U. Recordemos que existe una función f diferenciable de tal manera que ω se puede escribir como

$$\omega = f \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n .$$

Así, tiene sentido definir

$$\int_U \omega = \int_U f \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n . \tag{2.32}$$

En otras palabras, la integral de $f \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n$ es la integral de f sobre $U \subseteq \mathbb{K}^n$, respecto de $r^1, r^2, \ldots, r^n$.

Consideremos ahora una carta local $\varphi : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ sobre U con orientación positiva. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{U}} \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega &= \int_{\widehat{U}} \left(\varphi^{-1}\right)^* \left(f \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n\right) \\
&= \int_{\widehat{U}} \left(f \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \det\left(J\varphi^{-1}\right) \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n \\
&= \int_U f \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n = \int_U \omega
\end{aligned}$$

Notemos que en la última línea hemos usado que φ tiene orientación positiva ($\det\left(J\varphi^{-1}\right) > 0$), y el teorema de cambio de variable para funciones de varias variables (véase [8], página 271). Así, en efecto, se puede intuir que la extensión natural a abiertos precompactos de una variedad de la integral definida sobre formas de grado máximo siguiendo la ecuación (2.32) *no depende de la elección de cartas.*

Para cada k-forma η se puede definir el soporte de η de manera análoga a campos de vectores.

Definición 2.10.148. *Sea M una variedad diferenciable, y $\eta \in \Omega^k(M)$. El* ***soporte de*** *η se define como la clausura topológica del conjunto $C := \{x \in M \ : \ \eta(x) \neq 0\}$, y se denota por* $\operatorname{Supp}(\eta)$. *Una k-forma diferencial η se dice* ***de soporte compacto*** *si* $\operatorname{Supp}(\eta)$ *es compacto.*

Observemos que, dada la continuidad de η, *C es siempre un abierto de M*. Por otro lado, la clausura $\overline{C}$ de C es cerrada por definición. Luego, si M es compacta, *el soporte de η es compacto.* El soporte de η se denotará a lo largo del texto por $\overline{C}_\eta$.

Sea M una variedad diferenciable con orientación Ω, que puede ser cubierta por una única carta global $\varphi : M \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$. Entonces, tiene sentido definir la ***integral*** **de una n-forma** ω como,

$$\int_M \omega = \pm \int_{\widehat{U}} {\varphi^{-1}}^* \omega \tag{2.33}$$

El signo que tome la integral dependerá de si la carta φ está positivamente orientada o no: será $-$ cuando la orientación de φ sea negativa y $+$ cuando sea positiva. Así, de nuevo, la integral está bien definida (ejercicio 2.62), cuando la variedad tiene, al menos, una carta global. Sin embargo, generalmente, *no podemos asumir que existen coordenadas globales $\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ de M y, por lo tanto, no podemos aplicar directamente la ecuación (2.33) para definir la integral.* Para resolver este problema se trabajará con las llamadas *particiones de la unidad.*

Aquñi radica la principal diferencia de este tema con los anteriores: la integral es una noción global, así que necesitamos herramientas como

las mencionadas *particiones de la unidad* para lidiar con ella. Así, se entiende desde el principio que este tema tiene un «*escalón*» más de dificultad conceptual respecto a los anteriores, y se tratará despacio y con cuidado, para no confundir al lector. Se puntualiza, además, la gran utilidad que tiene para el estudiante conocer esta herramienta en tercero de carrera, puesto que tiene aplicaciones en muchas otras áreas que se estudiarán a posteriori.

En este punto se desarrollarán una serie de resultados técnicos que buscan construir y fundamentar la noción y existencia de particiones de la unidad. Dado el poco sentido que tiene exponer esto en detalle en el proyecto docente, vamos únicamente a señalar los pasos que se van a seguir (para el proceso detallado véase [13]).

1. La función $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-1/t}\,, & \text{si} \quad t > 0\,, \\ 0\,, & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases} \tag{2.34}$$
es diferenciable.

2. **Funciones test en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$**: Dada la bola abierta $B_3^n(0)$ de radio 3 y centro 0 en $\mathbb{R}^n$, podemos construir una función diferenciable $f : B_3^n(0) \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:
$$\begin{array}{lll} f(x) = 1\,, & \text{si} & x \in B_1^n(0)\,, \\ 0 \leq f(x) \leq 1\,, & \text{si} & x \in B_2^n(0)\,, \\ f(x) = 0\,, & \text{si} & x \in B_3^n(0) \setminus B_2^n(0)\,. \end{array}$$

3. **Funciones test en $\mathbb{H}^{\mathbf{n}}$**: Dada la bola abierta $B_3^n(0)$ de radio 3 y centro 0 en $\mathbb{R}^n$, podemos construir una función diferenciable $f : B_3^n(0) \cap \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:
$$\begin{array}{lll} f(x) = 1\,, & \text{si} & x \in B_1^n(0) \cap \mathbb{H}^n\,, \\ 0 \leq f(x) \leq 1\,, & \text{si} & x \in B_2^n(0) \cap \mathbb{H}^n\,, \\ f(x) = 0\,, & \text{si} & x \in (B_3^n(0) \setminus B_2^n(0)) \cap \mathbb{H}^n\,. \end{array}$$

4. Sea M una variedad diferenciable. Toda carta local ψ_V de un punto $x \in M$ puede ser *reparametrizada* en una carta local ψ_x de tal manera que su codominio es $B_3^n(0) \cap \mathbb{K}^n$, y la imagen de x es $(0, \ldots, 0)$.

5. **Teorema** (Existencia de particiones de la unidad). Sea M una variedad diferenciable compacta, y sea $\mathcal{F} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de cartas locales que recubre la variedad M. Entonces, existe una familia finita de funciones diferenciables $\{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathscr{C}^\infty(M)$ tal que

   a) $\sum_{i=1}^m f_i = 1$,

b) $0 \leq f_i \leq 1$ para todo $i = 1, \ldots, m$,

c) El soporte de cada f_i está contenido en algún entorno coordenado U_α.

6.

7. **Definición** (Particiones de la unidad). Sea M una variedad diferenciable, y consideremos una familia de cartas locales $\mathcal{F} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ que recubre M. Entonces, una **partición de la unidad diferenciable subordinada a la familia** $\mathcal{F}$ es una familia finita de funciones diferenciables $\{f_i\}_{i=1}^m$ que verifica las siguientes propiedades:

   a) $\sum_{i=1}^m f_i = 1$,

   b) $0 \leq f_i \leq 1$ para todo $i = 1, \ldots, m$,

   c) El soporte de cada f_i está contenido en algún entorno coordenado U_α.

Aunque estamos tratando únicamente el caso de variedades compactas, es importante que el estudiante sepa que la existencia de particiones de la unidad diferenciables se extiende a variedades diferenciables arbitrarias [16]. Este hecho es una de las herramientas más importantes para el estudio de los problemas globales en geometría dado que permite, «*pegar*» entornos coordenados. En nuestro caso, nos permite pasar de una definición local (2.33) a una definición global. *A lo largo de este capítulo, salvo que se especifique lo contrario, se asumirá que M es una variedad compacta de dimensión n orientable, con orientación Ω.*

Definición 2.10.149. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n compacta y orientable, con orientación Ω. Consideremos un recubrimiento abierto por cartas locales $\mathcal{F} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M, y una partición de la unidad diferenciable $\{f_i\}_{i=1}^m$ subordinada a la familia $\mathcal{F}$. Entonces, definimos la **integral de una n-forma** ω sobre M como*

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_M f_i \, \omega \,. \tag{2.35}$$

Observemos que, para cada i, dado que el soporte de f_i está contenido en algún U_α, $f_i \, \omega$ puede ser considerada como una n-forma sobre U_α y, así, teniendo en cuenta (2.33),

$$\int_M f_i \, \omega = \int_{U_\alpha} f_i \, \omega = \pm \int_{\widehat{U}_\alpha} \varphi_\alpha^{-1^*} (f_i \, \omega) = \pm \int_{\widehat{U}_\alpha} \left(f_i \circ \varphi_\alpha^{-1}\right) \varphi_\alpha^{-1^*} \omega, \tag{2.36}$$

donde $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \widehat{U}_\alpha$ es una carta local. Uno podría pensar que resultaría más útil tomar un recubrimiento de M por cartas con la misma orientación. Sin embargo, es importante recordar que, en general, tenemos que excluir las variedades compactas de dimensión 1 con borde no vacío. Luego, no podemos asumir que, en general, ese recubrimiento existe.

Es este un momento adecuado para tomarse un respiro en la lectura del texto, y pararse a meditar sobre la definición de la integral. Desde el inicio del capítulo se ha exigido que la variedad fuera orientable, con orientación Ω*. Sin embargo, ni en la forma local dada en la ecuación* (2.33) *ni en la definición 2.10.149 parece hacerse mención explícita al uso de* Ω*: ¿es realmente necesario que* M *sea orientable? ¿De qué sirve fijar* Ω*?*

Una vez comprendida la definición, pueden surgir algunas cuestiones naturales que iremos respondiendo en el texto:

- *¿Depende de la elección del recubrimiento* $\mathcal{F}$*?*
- *¿Depende de la elección de la partición de la unidad* $\{f_i\}_{i=1}^m$ *subordinada a* $\mathcal{F}$*?*
- *¿Hasta que punto la integral definida depende de la orientación fijada?*

Por supuesto, la respuesta a las dos primeras preguntas es negativa. Por otro lado, si tomamos otra forma de volumen Θ sobre una variedad orientable M con orientación Ω, y denotemos por $\int_M^\Theta$, a la integral que resulta de fijar Θ como orientación. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_M &= \int_M^\Theta \quad , \quad \text{si } \Theta \text{ tiene orientación positiva respecto a } \Omega\,, \\ \int_M &= -\int_M^\Theta \quad , \quad \text{si } \Theta \text{ tiene orientación negativa respecto a } \Omega\,. \end{aligned}$$

De este modo, se advierte que la noción de orientación cumple una función esencialmente dicotómica: determina si una carta local del atlas escogido debe considerarse orientada positiva o negativamente. En consecuencia, modificar la orientación global elegida en la variedad equivale, en términos prácticos, a cambiar el signo de cualquier integral definida sobre ella.

Definición 2.10.150 (Volumen)**.** *Sea* M *una variedad diferenciable compacta y orientable, con orientación* Ω*. Entonces, se define el* ***volumen*** *de* M *como*

$$\operatorname{Vol}(M) \;=\; \int_M \Omega\,.$$

De esta manera, el nombre de la forma de grado máximo que fija la orientación toma un mayor sentido, dado que es la forma que define el volumen de la variedad.

Si uno tiene en cuenta la intuición detrás del volumen de un conjunto, resulta natural realizar las siguientes preguntas: ¿Es el volumen un valor necesariamente no nulo? ¿Es siempre positivo? ¿Cómo se relacionan los posibles volúmenes si cambiamos la orientación?
En caso de que el volumen sea mayor estricto que cero, se invita al lector a cambiar la orientación por $\Theta = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\Omega$*, ¿Qué ocurre con el volumen de* M *si se realiza dicho cambio de orientación?*

Una vez establecida con rigor la noción de integral sobre una variedad compacta, nuestro enfoque se desplaza ahora desde el fundamento teórico hacia la aplicación práctica. Para ello, exploraremos una serie de resultados fundamentales que sirven como herramientas para el cálculo efectivo de dichas integrales. De nuevo, desarrollar las demostraciones en el proyecto docente carece de sentido (véase [13]).

1. **Teorema** (Cambio de variable). Sea $\psi : M \to N$ un difeomorfismo entre dos variedades orientables M y N, con orientaciones Ω_M y Ω_N, respectivamente. Entonces, para toda forma de grado máximo ω en N,

$$\int_N \omega = \pm \int_M \psi^* \omega \,,$$

donde el signo es el dado por la orientación de $\psi^*\Omega_N$; siendo $+$ si es positiva, y $-$ si es negativa.

Definición 2.10.151 (Dominio regular)**.** *Un* ***dominio regular*** *es una variedad diferenciable* $\mathcal{D}$ *de dimensión* n *contenida en* $\mathbb{R}^n$ *de tal manera que la topología de* $\mathcal{D}$ *es la topología de subespacio, y sus parametrizaciones locales* $f : \widehat{U} \to \mathbb{R}^n$ *son aplicaciones diferenciables con jacobiano regular en todo punto.*

Sea $\mathcal{D}$ *un dominio regular. Entonces, la aplicación inclusión* $i_{\mathcal{D}} \colon \mathcal{D} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una aplicación diferenciable tal que* $\mathsf{T}_x i_{\mathcal{D}}$ *es la identidad. En este caso,* $i_{\mathcal{D}}^*\Omega$ *es una forma de volumen (orientación) sobre* $\mathcal{D}$*, con* $\Omega = \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n$*.*

De esta manera, *a partir de este punto, se asumirá que* $i_{\mathcal{D}}^*\Omega$ *es la forma de volumen sobre* $\mathcal{D}$ *que define la orientación.*

2. **Corolario**. Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos dominios regulares precompactos en $\mathbb{R}^n$, y $\psi : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ un difeomorfismo. Entonces, para toda $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{D}_2)$,

$$\int_{\mathcal{D}_2} f \;\mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n \;=\; \int_{\mathcal{D}_1} (f \circ \psi)\,|\det(J\psi)\,|\mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n \,.$$

Se insta al estudiante a que haga una pausa en este punto y compare la formulación del teorema que acabamos de presentar con su contraparte en el cálculo euclídeo. Obsérvese el papel que en $\mathbb{R}^n$ juega el valor absoluto del determinante jacobiano, incluido implícitamente en, de manera elegante y mucho más general, por el pullback de la forma de volumen.

3. Vamos, por último, a reflexionar sobre un método muy común para calcular integrales por medio del teorema de cambio de variables. Si M es una variedad diferenciable, es bastante usual tomar una aplicación diferenciable y sobreyectiva $\psi : I_1 \times \cdots \times I_n \to M$, donde cada I_i es un intervalo cerrado, tal que sobre $\mathring{I}_1 \times \cdots \times \mathring{I}_r$ es inyectiva y $\det(J\psi) \neq 0$. Uno podría imaginar este tipo de aplicaciones como una suerte de deformación de una «*servilleta*» cuadrada de tal manera que «*pegan*» los bordes.

   Definición 2.10.152 (Dominio de integración)**.** *Un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ se denomina* ***dominio de integración*** *si es acotado y su frontera (topológica) tiene medida nula.*

4. **Teorema** (Integración por parametrizaciones). Sea M una variedad de dimensión n compacta y orientable, con orientación Ω, y sea $\omega \in \Omega^n(M)$. Supongamos que $D_1, \ldots, D_k \subseteq \mathbb{R}^n$ son dominios de integración abiertos tales que, para cada $i = 1, \ldots, k$, existe una aplicación diferenciable $f_i : \overline{D}_i \to M$, definida sobre la clausura de D_i, que cumple que:

   a) La restricción de f_i a D_i es una parametrización de M cuya inversa tiene orientación positiva.
   b) Si $i \neq j$, $f_i(D_i) \cap f_j(D_j) = \emptyset$.
   c) $\cup_{i=1}^k f_i\left(\overline{D}_i\right) = M$.

   Entonces,

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\overline{D}_i} f_i^* \omega$$

5. **Corolario**. Sea M una variedad de dimensión n compacta y orientable, con orientación Ω, y sea $\omega \in \Omega^n(M)$. Supongamos que podemos encontrar un dominio de integración abierto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y una aplicación diferenciable y sobreyectiva $f : \overline{D} \to M$, definida sobre la clausura de D, tal que $f|_D$ es una parametrización de M. Entonces,

$$\int_M \omega = \int_{\overline{D}} f^* \omega \,.$$

6. **Corolario**. Sea $\mathcal{D}$ un dominio regular y compacto de $\mathbb{R}^n$, y sea $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{D})$. Supongamos que podemos encontrar un dominio de integración abierto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y una aplicación diferenciable y sobreyectiva $f : \overline{D} \to \mathcal{D}$, definida sobre la clausura de D, tal que $f|_D$ es una parametrización de $\mathcal{D}$. Entonces,

$$\int_{\mathcal{D}} g \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n = \int_{\overline{D}} (g \circ f) \, |\det(Jf)| \, \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n$$

Así, **hemos presentado una serie de resultados destinados a ser aplicados para el cálculo explícito de integrales**. Calculamos, entonces, en este punto, el volumen de una bola por medio de estos resultados (en particular, como consecuencia del último corolario).

Antes de seguir tratando con la integral en variedades, notemos que las particiones de la unidad tendrán otra utilidad en este texto. De hecho, nos permiten probar que existen campos de vectores globales, tanto exteriores como interiores, a la frontera de una variedad compacta.

Teorema 2.10.153. *Sea M una variedad diferenciable compacta con borde. Entonces existe un campo de vectores global exterior (respectivamente, interior) a ∂M.*

De esta manera, utilizando la orientación inducida sobre la frontera de la variedad, únicamente podemos construir dos integrales diferentes, que difieren solamente en un cambio de signo. *Por convenio, la integral sobre ∂M se define como la integral inducida por la orientación sobre ∂M, inducida a su vez por un campo de vectores X exterior a ∂M*:

$$\int_{\partial M} = \int_{\partial M}^{\Omega_X}$$

En general, salvo que sea estrictamente necesario, nos referiremos a esta integral a lo largo del texto como la *integral inducida sobre ∂M*, y a la orientación como la *orientación inducida sobre ∂M*, omitiendo la mención al campo vectorial exterior que induce tanto la orientación como la integral.

3.2 Integral de línea

Habiendo edificado ya el imponente armazón teórico de la integración sobre variedades, es hora de cosechar los frutos de nuestro esfuerzo dirigiendo la atención a casos de particular importancia. El primero de todos, y uno de los más fecundos en aplicaciones, es el de la integración sobre «*dominios de dimensión uno*»; *¿qué significa integrar a lo largo de un filamento unidimensional inmerso en el espacio; es decir, a lo largo de una curva?*

De nuevo, no es necesario ni productivo, incluir esta sección en su totalidad en el proyecto docente. Así, incluiremos únicamente las claves más importantes de lo que se desarrolla en esta sección:

1. Por conveniencia, en esta sección denotaremos a la aplicación inclusión por $t : [a, b] \hookrightarrow \mathbb{R}$; $\mathrm{d}t$ es una forma de volumen en $[a, b]$. Así, para toda $\eta \in \Omega^1([a, b])$ forma de grado máximo, se cumple que

$$\eta = f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. **Proposición**. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado, y $\eta = f(t)\,\mathrm{d}t$ una 1-forma sobre $[a, b]$. Entonces,
$$\int_{[a,b]} \eta = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. **Integral de línea:** Sea $\gamma : [a, b] \to M$ un camino diferenciable a trozos sobre una variedad M, y $\eta \in \Omega^1(M)$. Entonces, la ***integral de línea*** de η sobre γ se define como
$$\int_\gamma \eta = \int_{[a,b]} \gamma^* \eta\,. \tag{2.37}$$

4. **Proposición**. Sea $\gamma : [a, b] \to M$ un camino diferenciable sobre una variedad M, y $\eta \in \Omega^1(N)$. Entonces, para toda aplicación diferenciable $F : M \to N$, se tiene que
$$\int_\gamma F^* \eta \;=\; \int_{F \circ \gamma} \eta\,.$$

   Un observador atento notará aquí una diferencia fundamental con la forma en que hemos tratado la integración hasta ahora. Mientras que la integral sobre una variedad depende exclusivamente del dominio geométrico, la integral de línea parece depender intrínsecamente de la parametrización $\gamma : [a, b] \to M$ y no solo de su imagen $\gamma([a, b])$. La razón de esta dependencia radica en que no hemos impuesto sobre γ las estrictas condiciones de una carta local; no es necesariamente inyectiva ni un homeomorfismo sobre su imagen. Se permiten, por tanto, situaciones *extrañas* en las que pueden aparecer *auto-intersecciones* y «*velocidades*» de distinto signo. Veamos, de manera específica, cómo depende la integral de la aplicación γ.

5. **Reparametrización:** Sea $\gamma : [c, d] \to M$ un camino diferenciable. Una **reparametrización del camino** γ se define como otro camino diferenciable $\hat{\gamma} : [a, b] \to M$ tal que
$$\gamma \circ \varphi \;=\; \hat{\gamma},$$
   con $\varphi : [a, b] \to [c, \mathrm{d}]$ un difeomorfismo. Si φ es creciente, $\hat{\gamma}$ es una **reparametrización positiva**. Por el contrario, si φ es decreciente, $\hat{\gamma}$ es una **reparametrización negativa**.

6. En base al ejercicio 2.64 y la proposición, se tiene que
$$\int_\gamma \eta = \begin{cases} \int_{\hat{\gamma}} \eta & \text{si } \hat{\gamma} \quad \text{es una reparametrización positiva}\,, \\ \\ -\int_{\hat{\gamma}} \eta & \text{si } \hat{\gamma} \quad \text{es una reparametrización negativa}\,. \end{cases}$$

7. **Teorema (para el cálculo explícito de estas integrales)**. Sea $\gamma : [a, b] \to M$ un camino diferenciable sobre una variedad M, y $\eta \in \Omega^1(M)$. Entonces,
$$\int_\gamma \eta \;=\; \int_a^b \{\eta(\gamma(t))\}(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

8. **Camino simple:** Un camino diferenciable $\gamma : [a,b] \to M$ se dice ***simple*** si:

   a) Para todo $t \in (a,b)$, se cumple que
   $$\gamma'(t) \neq 0\,.$$

   b) O bien γ es inyectiva en $[a,b]$, o bien γ es inyectiva en $[a,b)$ y $\gamma(a) = \gamma(b)$.

   Un camino $\gamma : [a,b] \to M$ que satisface que $\gamma(a) = \gamma(b)$ se denomina ***camino cerrado***.

9. **Proposición**. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ un camino simple. Entonces,

   a) Si γ no es cerrado, $C = \gamma([a,b])$ es una variedad orientable de dimensión 1, cuyo borde viene dado por $\{\gamma(a), \gamma(b)\}$.

   b) Si γ es cerrado, $C = \gamma((a,b))$ es una variedad orientable de dimensión 1 sin borde.

   Definición 2.10.154. *Sea γ un camino simple. Denotaremos por C_γ a $\gamma((a,b))$ o $\gamma([a,b])$, según sea cerrado o no cerrado. La orientación sobre C_γ dada en* **??** *se denomina* ***orientación inducida por*** *γ.*

10. **Proposición**. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ un camino simple. Entonces, para toda $\eta \in \Omega^1(M)$,
   $$\int_\gamma \eta = \int_{C_\gamma} i_{C_\gamma}^* \eta\,,$$
   donde la orientación de C_γ es la inducida por γ.

   Es fundamental señalar el significado de este resultado: sirve de puente entre dos formulaciones. Aunque la integral de línea fue introducida con una definición propia, este teorema demuestra que, para caminos sin «*situaciones singulares*», esta no es sino un caso particular de la integral sobre variedades (definición 2.10.149). Se confirma así, tal como cabía esperar, la coherencia y la potencia del edificio teórico que se ha construido. *De este punto en adelante, salvo que se especifique lo contrario, únicamente trabajaremos con caminos simples.*

Podría resultar beneficioso reflexionar en este punto sobre el problema inverso. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ un camino diferenciable cuya imagen $C = \gamma([a,b])$ es una variedad diferenciable de dimensión 1. ¿Es cierta la igualdad
$$\int_\gamma \eta = \pm \int_C i_C^* \eta\,,$$
para toda $\eta \in \Omega^1(M)$?

3.3 Integral de superficie

Tras la introducción y el estudio de la integración sobre dominios unidimensionales (*la integral de línea*), el siguiente paso es el caso bidimensional: las *superficies*. Siguiendo el formalismo del texto, así como la integral de línea correspondía a la integración de una 1-forma a lo largo de un filamento, la integral de superficie se puede entender, *grosso modo*, la integral de una 2-forma diferencial sobre una variedad orientada de dimensión dos. Esta sección está dedicada a presentar el concepto de integral de superficie. Un estudio detallado sobre **superficies** se puede encontrar en [7] (libro de texto base de la asignatura Geometría diferencial de curvas y superficies, cód. 61023067). Para aumentar la coherencia global del grado, como se comentó en la primera parte del proyecto docente, se mantendrá la notación utilizada en dicho libro de texto.

Para la explicación de esta sección en el proyecto docente seguiremos una estrategia similar a la de la anterior sección: únicamente se especificarán los puntos a seguir para comprender lo que se desarrolla en la sección.

1. **Definición:** Una **superficie** es un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ de tal manera que, para todo punto $x \in S$, existe un abierto U de $\mathbb{K}^2$, y una aplicación $f = \left(f^1, f^2, f^3\right) : U \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, con $x \in f(U) \subseteq S$ tal que:

   a) f es un homeomorfismo sobre la imagen (con la topología subespacio en la imagen).

   b) La matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f^i}{\partial r^j}\right)$ tiene rango dos en todos los puntos.

Conviene, en este punto, realizar un pequeño parón en la lectura para reflexionar sobre el concepto de superficie. La noción de «camino diferenciable» es, por construcción, más general que la de variedad; necesitamos un tipo de camino más restrictivo para recuperar el concepto de variedad diferenciable (camino simple, por ejemplo). Por analogía, cabe ahora preguntarse: ¿cuál es la relación entre nuestro concepto de superficie y el de variedad diferenciable? ¿Es la noción de superficie más restrictiva, más general o equivalente a la de variedad?

2. **Teorema** (Relación con el concepto de variedad). Un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ es una superficie si y solo si S es una variedad de dimensión 2 contenida en $\mathbb{R}^3$ con la topología subespacio y, para todo $p \in S$, existe una carta local $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ alrededor de p cuya restricción $\psi|_S : S \cap U \to \mathbb{R}^3$ satisface

$$\psi(x, y, z) = \left(r^1 \circ \psi(x, y, z), r^2 \circ \psi(x, y, z), 0\right), \ \forall (x, y, z) \in S \cap U, \quad (2.38)$$

y, por lo tanto, la aplicación dada por las dos primeras coordenadas de ψ, $\varphi = \psi|_S = \left(r^1 \circ \psi, r^2 \circ \psi\right) : S \cap U \to \mathbb{K}^2$, es una carta local de S alrededor de p. Además, si S es una superficie, la aplicación inclusión $i_S \colon S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable tal que $\mathsf{T}_x i_S$ es una aplicación lineal inyectiva de rango 2.

3. **Contraejemplo:** Uno podría verse tentado a suponer que se pueden reducir las condiciones de tal manera *que toda variedad S de dimensión 2 contenida en $\mathbb{R}^3$ cumpliendo que la inclusión $i_S \colon S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable y que su inducida tangente $\mathsf{T}_x i_S$ es inyectiva en todo punto $x \in S$, es una superficie.*

   Para esto presentamos como contraejemplo la **Superficie del ocho**, que viene dada por la imagen de la aplicación $\psi \colon (-\pi, \pi) \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\psi(t, s) = (\sin 2t, \sin t, s) \ .$$

   de tal manera que ψ es un difeomorfismo en su imagen. Además, dado que ψ es

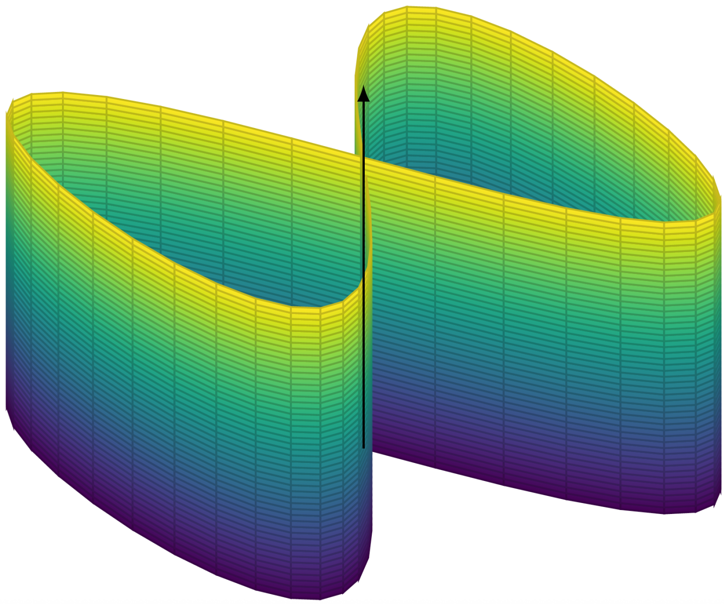


Figura 2.28: Superficie del ocho.

   diferenciable, la aplicación inclusión $i_S \colon S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es obviamente diferenciable.

Por otro lado, mostraremos que

$$\mathsf{T}_x i_S \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_x \right) = 2\cos 2t \left. \frac{\partial}{\partial r^1} \right|_x + \cos t \left. \frac{\partial}{\partial r^2} \right|_x$$
$$\mathsf{T}_x i_S \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_x \right) = \left. \frac{\partial}{\partial r^3} \right|_x$$

Es decir, $\mathsf{T}_x i_S$ es inyectiva para cualquier x en e S. No obstante, *no puede ser una superficie.* En caso de que ψ sea un difeomorfismo sobre su imagen S, S no puede ser compacto (puesto que el dominio no lo es).

Notemos, sin embargo, que esto no es suficiente para probar que S no es una superficie. Un estudiante atento se daría cuenta de que, en realidad, habría que probar la siguiente afirmación: *no existe ninguna manera de dotar a* S *de estructura de variedad diferenciable de dimensión* 2 *contenida en* $\mathbb{R}^3$ *con la topología subespacio.* Es decir, no basta con probar que la estructura definida no cumple las condiciones, sino que hay que demostrar que cualquier otra tampoco las cumple.

La clave para lidiar con esto está en los puntos de S de la forma $(0,0,z)$. Si existiera alguna otra estructura diferenciable sobre S de tal manera que S fuese una variedad de dimensión 2 con la topología subespacio, entonces todo punto de la forma $(0,0,z) \in S$ debería tener un entorno abierto U en $\mathbb{R}^3$ que lo contuviese, y tal que $U \cap S$ fuese localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, i,e, $U \cap S$ es *deformable* en un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$. Uno puede intuir que esto resulta en una contradicción.

La justificación de este punto es puramente topológica y su detalle excede los objetivos de este texto. El lector puede omitir la siguiente prueba sin perder el hilo argumental.

Procedamos por reducción al absurdo y empecemos, por simplicidad, eligiendo el punto $(0,0,0) \in S$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar una carta local $\varphi : B^3_2(0,0,0) \cap S \to \widehat{U}$, tal que $\widehat{U}$ es un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$, $B^3_2(0,0,0)$ es la bola abierta de centro $(0,0,0)$ radio 2 en $\mathbb{R}^3$, y $\varphi_U(0,0,0) = (0,0,0)$.

Observemos que, como consecuencia, la intersección de $\overline{B}^3_1(0,0,0) \cap S$ es una variedad diferenciable 2 difeomorfa a $\varphi\left(\overline{B}^3_1(0,0,0) \cap S\right) = U \subseteq \widehat{U}$, cuyo borde satisface la siguiente igualdad: $\varphi\left(\partial\overline{B}^3_1(0,0,0) \cap S\right) = \partial U$. Además, la intersección de $\partial\overline{B}^3_1(0,0,0) \cap S$ con la recta $\{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ consta de dos únicos puntos, $(0,0,z_1)$ y $(0,0,z_2)$, que separan la frontera $\partial\overline{B}^3_1(0,0,0) \cap S$

en 4 componentes conexas. Sin embargo, $\varphi(0,0,z_1)$ y $\varphi(0,0,z_2)$ únicamente pueden separar la curva cerrada ∂U en $\mathbb{R}^2$ en 2 componentes conexas. Dado que las componentes conexas se preservan por homeomorfismos, hemos llegado a un absurdo.

Aunque se sale de los propósitos del texto, cabe notar que a este tipo de estructura se le conoce como *subvariedad embebida* (o *encajada*) en $\mathbb{R}^3$ dado que su estructura es algo más restrictiva que la estructura de una variedad de dimensión 2 contenida en $\mathbb{R}^3$ [16]. Uno puede encontrar alguna diferencia con respecto a la definición de superficie dada en [7]. La más obvia es quizá la terminología: en [7] se denomina carta lo que en este texto se llama parametrización. Por otro lado, aquí necesitamos trabajar con superficies que puedan tener borde, luego no podemos quedarnos únicamente con parametrizaciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^2$.

Vale la pena pararse en este punto para meditar sobre la posible definición de integral de superficie. Sabemos cómo definir la integral sobre variedades y sobre curvas, siendo la superficie una variedad de dimensión 2 (ejercicio 2.68), ¿es, entonces, trivial definir la integral de superficie?

4. **Orientación:** Observemos que una superficie S tiene, exactamente, una dimensión menos que el espacio en el que está contenida ($\mathbb{R}^3$), tal y como ocurre con la frontera ∂M de una variedad con borde M. Así, si $S = \partial \mathcal{B}$, con $\mathcal{B}$ una variedad orientable de dimensión 3 contenida en $\mathbb{R}^3$, el problema está resuelto. No obstante, en general, no podemos asumir que nuestra superficie S es el borde de una variedad mayor. Este hecho, sin embargo, no impide que podamos seguir una filosofía análoga al definición 2.10.146, en el que se estudia la orientación inducida sobre ∂M. La estrategia a seguir consta de los siguientes pasos:

   a) Identificar cierto tipo de «*campos vectoriales no tangentes a S*».

   Definición 2.10.155 (Normal)**.** *Sea S una superficie. Un campo de vectores X en $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S se dice* ***normal*** *a S si, para todo $x \in S$ y todo $v_x \in \mathsf{T}_x S$, se tiene que*

   $$\langle X(x), \mathsf{T}_x i_S(v_x)\rangle = 0\,, \tag{2.39}$$

   donde $i_S : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación inclusión, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

   En términos locales, se mostrará al estudiante que un campo de vectores

X es normal a S si,

$$X(x)\left(r^i\right) \left.\frac{\partial f_U^i}{\partial r^j}\right|_x = 0, \; j = 1, 2\,, \tag{2.40}$$

donde f_U es la inversa de una carta local φ_U cualquiera, f_U^k a la coordenada k-ésima de f_U.

b) Supongamos que existe un campo de vectores N de $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S, que no se anula en ningún punto, y que es normal a S en todo punto.

Entonces, análogamente a definición 2.10.146, se define la 2-forma sobre S dada por

$$i_S^*\left(\iota_N \Omega\right)\,, \tag{2.41}$$

donde $\Omega = \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3$.

5. **Teorema** (Recíproco). Una superficie S es orientable si y solo si existe un campo de vectores unitario (de norma 1) normal a S.

Tal como se ha señalado reiteradamente a lo largo del proyecto docente, conviene enfatizar que, aunque no merece la pena incluir la demostración, el proceso de demostración de este teorema encierra mayor contenido que el que refleja su enunciado. De hecho, nos aporta una manera de calcular (en caso de existir) las coordenadas locales de los dos campos de vectores unitarios y normales a la superficie. Sobre cada carta local $\left(U \cap S, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$, podemos definir el campo de vectores normal unitario dado por

$$N = \pm\frac{\overline{N}}{||\overline{N}||}\,, \quad \overline{N} = \frac{\partial}{\partial x^1} \times \frac{\partial}{\partial x^2}\,,$$

donde signo depende de la orientación de φ_U: si es positiva el signo es «+», mientras que si es negativa el signo es «−». Además, se satisface lo siguiente:

$$\Omega\left(\overline{N}(x)\,, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_x\right) = ||\overline{N}(x)\,||^2 > 0\,. \tag{2.42}$$

Entonces,

$$\Omega\left(N(x)\,, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_x\right) = \pm||\overline{N}(x)\,|| \tag{2.43}$$

El signo depende de si la carta local tiene orientación positiva (+) o negativa (−).

Corolario 2.10.156. *Sea S una superficie orientable, con orientación ω. Entonces, para toda carta local $\left(U \cap S, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$, se tiene que*

$$i_S^*\left(\iota_N \Omega\right) = \pm\left\|\frac{\partial}{\partial x^1} \times \frac{\partial}{\partial x^2}\right\| \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2\,,$$

donde N es uno de los dos campos de vectores unitarios y normales a S, de tal manera que signo depende de la orientación de φ_U; si es positiva el signo es «+», mientras que si es negativa el signo es «−».

6. **Contraejemplo:** Se estudiará ahora en detalle la banda de Möbius como ejemplo de superficie no orientable, a través de la imposibilidad de existencia de una normal unitaria.

7. **Primera definición (formas diferenciales):** Conviene subrayar que, en este punto, se ha ya introducido el concepto de superficie y hemos analizado en detalle tanto sus implicaciones como las equivalencias que lo caracterizan. Asimismo, se ha puesto de manifiesto que la orientabilidad de una superficie no constituye una propiedad automática, sino que depende de la existencia de un campo normal definido globalmente sobre ella. Con estos elementos fundamentales, *disponemos de las herramientas necesarias para establecer rigurosamente la noción de integral sobre una superficie.* Dada una superficie S compacta y orientable, con orientación determinada por el campo de vectores normal unitario sobre S dado por N (esto es, la forma de volumen que define la orientación de S viene dada por $i_S^*(\iota_N \Omega)$, con $\Omega = \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3$), para toda 2-forma ω en S, la definición 2.10.149 nos permite definir la ***integral de superficie de ω sobre S***:
$$\int_S \omega \, .$$

8. **Segunda definición (campos de vectores):** Definimos la siguiente aplicación inyectiva:
$$X \in \mathfrak{X}_S\left(\mathbb{R}^3\right) \mapsto \langle X, N\rangle \, i_S^*(\iota_N \Omega)$$

   Definición 2.10.157 (Integral de superficie)**.** *Sea S una superficie compacta y orientable, cuya orientación viene inducida por un campo de vectores normal y unitario N sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S. Entonces, para cada campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S, se define la* ***integral de superficie de X sobre S con respecto a N*** *como,*
$$\int_S X \;=\; \int_S \langle X, N\rangle \;\; i_S^*(\iota_N \Omega) \, .$$

9. **Se mostrará ahora otra manera equivalente de escribir la integral de un campo de vectores.**

   Lema 2.10.158. *Sea S una superficie orientable cuya orientación viene determinada por un campo de vectores normal y unitario N a lo largo de S. Entonces, para todo campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S,*
$$i_S^*(\iota_X \Omega) \;=\; \langle X, N\rangle \, i_S^*(\iota_N \Omega) \, ,$$
   con $\Omega = \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3$.

Como consecuencia inmediata, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.10.159. *Sea S una superficie compacta y orientable cuya orientación viene determinada por un campo de vectores normal y unitario N a lo largo de S. Entonces, para todo campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S,*

$$\int_S X \;=\; \int_S i_S^* \left(\iota_X \Omega\right) . \tag{2.44}$$

10. **Forma local:**

Sea X un campo de vectores sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de una superficie compacta y orientable S, con orientación inducida por el campo de vectores normal y unitario N. Respecto a las coordenadas canónicas $\left(r^i\right)$ de $\mathbb{R}^3$, estos campos se escriben

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial r^i}, \qquad\qquad N = N^i \frac{\partial}{\partial r^i} .$$

Sea $\left(U \cap S, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ una carta local sobre S positivamente orientada. Entonces,

$$i_S^* \left(\iota_X \Omega\right) = \langle X, N\rangle \, i_S^* \left(\iota_N \Omega\right) = \left\langle X, \overline{N}\right\rangle \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2, \tag{2.45}$$

donde, $\overline{N} = \frac{\partial}{\partial x^1} \times \frac{\partial}{\partial x^2}$. Así,

$$\begin{aligned}\left\langle X, \overline{N}\right\rangle = X^1 &\left[\frac{\partial r^2}{\partial x^1}\frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1}\frac{\partial r^2}{\partial x^2}\right] - X^2 \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1}\frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1}\frac{\partial r^1}{\partial x^2}\right] \\ &+ X^3 \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1}\frac{\partial r^2}{\partial x^2} - \frac{\partial r^2}{\partial x^1}\frac{\partial r^1}{\partial x^2}\right] .\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando la ecuación (2.33),

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{U}} X &= \int_{\widehat{U}} \left\langle X, \overline{N}\right\rangle \circ \varphi_U^{-1} \mathrm{d}r^1 \mathrm{d}r^2 \\ &= \int_{\widehat{U}} \left(X^1 \left[\frac{\partial r^2}{\partial x^1}\frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1}\frac{\partial r^2}{\partial x^2}\right] - X^2 \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1}\frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1}\frac{\partial r^1}{\partial x^2}\right]\right. \\ &\quad \left. + X^3 \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1}\frac{\partial r^2}{\partial x^2} - \frac{\partial r^2}{\partial x^1}\frac{\partial r^1}{\partial x^2}\right]\right) \circ \varphi_U^{-1} \;\; \mathrm{d}r^1 \mathrm{d}r^2 .\end{aligned} \tag{2.46}$$

3.4 Teorema de Stokes

Antes de abordar este teorema, recordaremos los dos teoremas fundamentales de cálculo:

Teorema 2.10.160 (Primer teorema fundamental del cálculo)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable, y continua en (a,b). Consideremos*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t .$$

Entonces F es derivable, y $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a,b)$.

Teorema 2.10.161 (Segundo teorema fundamental del cálculo)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable, y asumamos que existe una función g tal que $f = g'$. Entonces,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = g(b) - g(a)\ .$$

El objetivo principal de esta sección será presentar al estudiante una versión del teorema 2.10.161 aplicable a las integrales en variedades. Para vislumbrar cómo lograr esta meta, mostraremos primero un caso simple. Consideremos la variedad 2-dimensional $\mathbb{H}^2$, y $\eta \in \Omega^1(\mathbb{H}^2)$, con soporte compacto $\overline{C}_\eta \subset \mathbb{H}^2$ cumpliendo que,

$$\partial\mathbb{H}^2 \cap \overline{C}_\eta \coloneqq [0,b] \times \{0\}\ ,$$

tal y como se muestra representado en la figura 2.29. En las coordenadas canónicas globales (r^i) de $\mathbb{H}^2$, η se escribe como,

$$\eta = \eta_1 \mathrm{d}r^1 + \eta_2 \mathrm{d}r^2\,.$$

Por lo tanto, considerando la inclusión $i : \partial\mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
i^*\eta &= i^*\left(\eta_1 \mathrm{d}r^1 + \eta_2 \mathrm{d}r^2\right) \\
&= (\eta_1 \circ i)\,\mathrm{d}\left(r^1 \circ i\right) + (\eta_2 \circ i)\,\mathrm{d}\left(r^2 \circ i\right) \\
&= (\eta_1 \circ i)\,\mathrm{d}r^1\,.
\end{aligned}$$

Dado que, por compacidad, $\overline{C}_\eta$ está acotado, sabemos que existe un rectángulo $Q = [-R,R] \times [0,R] \subseteq \mathbb{H}^2$ de tal manera que $\overline{C}_\eta \subset \mathring{Q}$ (se está tomando el interior de Q como subconjunto de $\mathbb{H}^2$). Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^2} \mathrm{d}\eta &= \int_{\mathbb{H}^2} \left[\frac{\partial \eta_2}{\partial r^1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial r^2}\right] \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \\
&= \int_Q \frac{\partial \eta_2}{\partial r^1} \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 - \int_Q \frac{\partial \eta_1}{\partial r^2} \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \\
&= \int_0^R \int_{-R}^R \frac{\partial \eta_2}{\partial r^1} \mathrm{d}r_1 \mathrm{d}r_2 - \int_0^R \int_{-R}^R \frac{\partial \eta_1}{\partial r^2} \mathrm{d}r_1 \mathrm{d}r_2 \\
&= \int_0^R \int_{-R}^R \frac{\partial \eta_2}{\partial r^1} \mathrm{d}r_1 \mathrm{d}r_2 - \int_{-R}^R \int_0^R \frac{\partial \eta_1}{\partial r^2} \mathrm{d}r_2 \mathrm{d}r_1\,.
\end{aligned}$$

Utilizando ahora el teorema 2.10.161, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^2} \mathrm{d}\eta = &\int_0^R \eta_2(R, r_2)\,\mathrm{d}r_2 - \int_0^R \eta_2(-R, r_2)\,\mathrm{d}r_2 \\
&+ \int_{-R}^R \eta_1(r_1, 0)\,\mathrm{d}r_1 - \int_{-R}^R \eta_1(r_1, R)\,\mathrm{d}r_1\,.
\end{aligned}$$

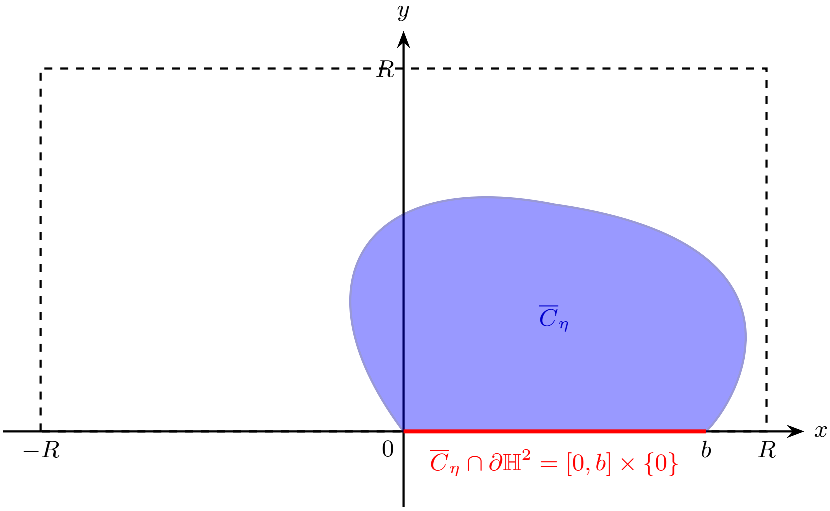


Figura 2.29: Dominio compacto $\overline{C}_\eta \subset \mathbb{H}^2$.

Dado que $\overline{C}_\eta \subset \mathring{Q}$, todos los sumandos son iguales a 0 salvo $\eta_1(r_1, 0)$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^2} \mathrm{d}\eta &= \int_{-R}^{R} \eta_1(r_1, 0)\, \mathrm{d}r_1 \\ &= \int_{-R}^{R} (\eta_1 \circ i)\, \mathrm{d}r_1 \\ &= \int_{\partial\mathbb{H}^2} i^*\eta\,.\end{aligned}$$

Así, hemos probado que

$$\int_{\mathbb{H}^2} \mathrm{d}\eta = \int_{\partial\mathbb{H}^2} i^*\eta\,.$$

Esto da una idea al estudiante del tipo de resultado que se va a obtener si se busca generalizar el teorema 2.10.161 a variedades diferenciables con borde. Notemos que, implícitamente, se está considerando la orientación $\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2$ sobre $\mathbb{H}^2$, y sobre $\partial\mathbb{H}^2$ la orientación dada por

$$\mathrm{d}r^1 = \iota_{-\frac{\partial}{\partial r^2}}\left(\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2\right)\,,$$

es decir, *la orientación inducida por el campo de vectores* $-\frac{\partial}{\partial r^2}$ *exterior a* $\partial\mathbb{H}^2$ (ver subsección 2.10.6).

Teorema 2.10.162 (Teorema de Stokes)**.** *Sea M una variedad diferenciable, compacta, orientable y de dimensión n. Sea ω una $(n-1)$-forma sobre M. Entonces,*

$$\int_{\partial M} i^*\omega \;=\; \int_M \mathrm{d}\omega,$$

con $i : \partial M \hookrightarrow M$ la aplicación inclusión.

En la práctica, frecuentemente omitiremos la inclusión y, cometiendo un pequeño abuso de notación, denotaremos $i^*\omega$ simplemente por ω. Así, generalmente se hará mención a la identidad dada por el teorema de Stokes de la siguiente manera:

$$\int_{\partial M} \omega \;=\; \int_M \mathrm{d}\omega\,.$$

Demostración. **Dada la importancia de este resultado, en este caso, incluiremos esta demostración.** Denotemos al soporte de ω por $\overline{C}_\omega$. Observemos que $\overline{C}_\omega$ es compacto, por ser un cerrado contenido en un compacto (M). Asumamos primero que existe una carta local $\big(U, \varphi_U = \big(x^1, \ldots, x^n\big)\big)$ de M de tal manera que

$$\overline{C}_\omega \subset U\,. \tag{2.47}$$

Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que U es un abierto precompacto. Observemos que, entonces, ω está caracterizada por su restricción a U:

$$\omega|_U = \sum_{j=1}^n \omega_J \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j-1} \wedge \mathrm{d}x^{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\,. \tag{2.48}$$

Aquí, por simplicidad, denotamos $J = 1 \cdots (j-1)\,(j+1) \cdots n$. Además, aplicando la derivada exterior resulta que

$$\mathrm{d}\omega|_U = \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_J}{\partial x^j}\right] \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\,. \tag{2.49}$$

Cada una de las funciones ω_J puede ser extendida a todo M de la siguiente manera:

$$\hat{\omega}_J = \begin{cases} \omega_J & si \quad x \in U\,, \\ 0 & si \quad x \notin U\,. \end{cases}$$

Es fácil, usando (2.47), darse cuenta de que $\hat{\omega}_J$ es diferenciable, para todo $x \in M$. Consideremos ahora dos casos (véase la figura 2.30):

1. Caso $U \cap \partial M = \emptyset$. Entonces, teniendo en cuenta (2.47), se tiene que $\overline{C}_\omega \cap \partial M = \emptyset$, lo que implica que

   $$\int_{\partial M} i^*\omega \;=\; 0\,.$$

   Dado que en U no hay puntos frontera, podemos asumir que φ_U es un difeomorfismo sobre un abierto $\widehat{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Vamos a considerar un cubo cerrado $Q \subset \mathbb{R}^n$ dado por

   $$Q \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \;:\; -R \leq x_j \leq R\} = [-R, R]^n\;,$$

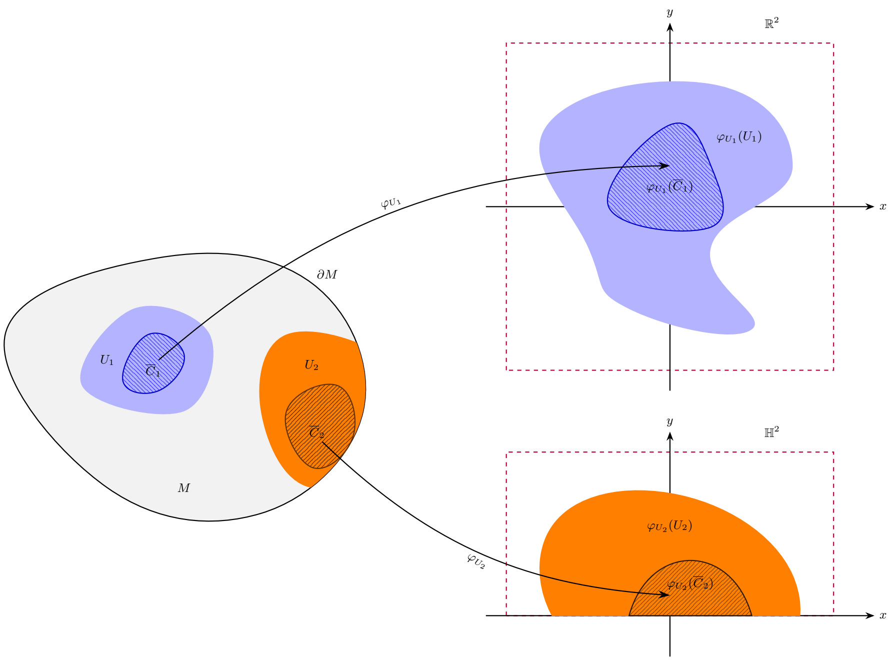


Figura 2.30: Representación bidimensional de los casos posibles para el soporte compacto $\overline{C}_i$ $(i = 1, 2)$ de una forma ω, donde $\overline{C}_1 \subset U_1$ con $\varphi_{U_1}(U_1) \subset [-R, R] \times [-R, R]$ corresponde al caso 1, mientras que $\overline{C}_2 \subset U_2$ con $\varphi_{U_2}(U_2) \subset [-R, R] \times [0, R]$ corresponde al caso 2.

de tal manera que $R > 0$ es lo suficientemente grande para que $\varphi_U\left(\overline{C}_\omega\right) \subset \mathring{Q}$. Nótese que esto es posible debido a que $U \cap \partial M = \emptyset$ y $\overline{C}_\omega \subseteq U$ es compacto.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega &= \int_U \left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_J}{\partial x^j}\right] \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_M \frac{\partial \hat{\omega}_J}{\partial x^j} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial \overline{\omega}_J}{\partial r^j} \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{[-R,R]^{(n-1)}} \overline{\omega}_J \left(r^1, \ldots, R, \ldots, r^n\right) \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^{j-1} \mathrm{d}r^{j+1} \cdots \mathrm{d}r^n \\
&- \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{[-R,R]^{(n-1)}} \overline{\omega}_J \left(r^1, \ldots, -R, \ldots, r^n\right) \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^{j-1} \mathrm{d}r^{j+1} \cdots \mathrm{d}r^n \\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

donde $\overline{\omega}_J = \hat{\omega}_J \circ \varphi_U^{-1}$, y se ha tenido en cuenta que

$$
\overline{\omega}_J \left(x_1, \ldots, -R, \ldots, x_n\right) = \overline{\omega}_J \left(x_1, \ldots, R, \ldots, x_n\right) = 0,\ \ j = 1, \ldots n\,.
$$

2. Caso $U \cap \partial M \neq \emptyset$. Consideremos, en este caso, el cubo cerrado $Q \subset \mathbb{H}^n$ dado por

$$
\begin{aligned}
Q &:= \{(x_1, \ldots, x_n) \ :\ \ -R \leq x_j \leq R,\ 0 \leq x_n \leq R\} \\
&= [-R, R]^{(n-1)} \times [0, R]\,,
\end{aligned}
$$

de tal manera que $R > 0$ es suficientemente grande para satisfacer que $\varphi_U\left(\overline{C}_\omega\right) \subset \varphi_U\left(U\right) \subseteq \mathring{Q}$. Cabe notar que aquí estamos tomando el interior de Q como subconjunto de $\mathbb{H}^n$ (pues tiene intersección no vacía con el hiperplano $x_n = 0$).

Notemos que en la demostración del definición 2.10.77 (apoyado en el definición 2.10.74) se probó que toda carta local (U, φ_U) de un punto frontera induce una carta local en ∂M dada por $(U \cap \partial M, p \circ \varphi_U|_{\partial M})$, donde $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ es la proyección en las $n-1$ primeras coordenadas, y la expresión local de la inclusión está dada por

$$
\varphi_U \circ i \circ \varphi_U|_{\partial M}{}^{-1}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right) = \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0\right)\,. \tag{2.50}
$$

Con esto, se tiene que la expresión local del *pullback* de ω por la inclusión viene dada por

$$\begin{aligned}
i^*\omega &= i^*\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_J \, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j-1} \wedge \mathrm{d}x^{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\omega_J \circ i) \, \mathrm{d}\left(x^1 \circ i\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(x^{j-1} \circ i\right) \wedge \mathrm{d}\left(x^{j+1} \circ i\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(x^n \circ i\right) \\
&= \left(\omega_{1\cdots(n-1)} \circ i\right) \mathrm{d}\left(x^1 \circ i\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(x^{n-1} \circ i\right) .
\end{aligned}$$

Así, utilizando una notación análoga al caso anterior,

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega = \int_U & \left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_J}{\partial x^j}\right] \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_M \frac{\partial \hat{\omega}_J}{\partial x^j} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial \overline{\omega}_J}{\partial x_j} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= (-1)^{n-1} \int_{Q^n} \Big[\overline{\omega}_{1\cdots(n-1)} \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, R\right) \\
&\qquad\qquad - \overline{\omega}_{1\cdots(n-1)} \left(x_1, x_2, \ldots, 0\right)\Big] \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \\
&+ \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \int_{Q^j} \overline{\omega}_J \left(x_1, \ldots, -R, \ldots, x_n\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{j-1} \mathrm{d}x_{j+1} \cdots \mathrm{d}x_n \\
&- \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \int_{Q^j} \overline{\omega}_J \left(x_1, \ldots, R, \ldots, x_n\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{j-1} \mathrm{d}x_{j+1} \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= (-1)^n \int_{Q^n} \overline{\omega}_{1\cdots(n-1)} \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \\
&= \int_{\partial M} i^*\omega
\end{aligned}$$

Aquí, para cada $l = 1, \ldots, n$, cada cubo cerrado $Q^l \subset \mathbb{R}^{n-1}$ viene dado por la proyección de Q sobre $\mathbb{R}^{n-1}$ «*sustrayendo*» la coordenada l-ésima. Notemos que la última identidad se prueba usando la ecuación (2.50). Observemos que

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r^n}} \left(\mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n\right) \; = \; (-1)^n \, \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^{n-1} .$$

Veamos, por último, cómo tratar el caso en que el soporte de ω no está contenido en ningún entorno coordenado. En este caso, tomemos un recubrimiento de M por cartas locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ consistentemente orientadas. Entonces, por compacidad, podemos encontrar un subrecubrimiento finito $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{r}$. Tomemos, además, una partición de la unidad $\{f_i\}_{i=1}^r$ subordinada a $\{U_i\}_{i=1}^r$ y, así, se consideran las $(n-1)$-formas dadas por,

$$\omega_i \;=\; f_i\,\omega\,.$$

El soporte de cada una de estas $(n-1)$-formas es un compacto contenido en un entorno coordenado y, por lo tanto,

$$\int_{\partial M} i^*\omega_i \;=\; \int_M \mathrm{d}\omega_i\,.$$

Ahora bien,

$$\sum_{j=1}^r i^*\omega_j = \left(\sum_{j=1}^r f_j\circ i\right) i^*\omega = i^*\omega\,,$$

y

$$\sum_{j=1}^r \mathrm{d}\omega_j = \left(\sum_{j=1}^r \mathrm{d}f_j\right)\wedge\omega + \left(\sum_{j=1}^r f_j\right)\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega\,,$$

dado que $\sum_{j=1}^r \mathrm{d}f_j = \mathrm{d}\sum_{j=1}^r f_j$ y $\sum_{j=1}^r f_j$ es la función constante igual a 1. Entonces,

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \sum_{j=1}^r \int_{\partial M} i^*\omega_j = \sum_{j=1}^r \int_M \mathrm{d}\omega_j = \int_M \mathrm{d}\omega\,.$$

□

Concluida la demostración del teorema de Stokes, es importante detenerse un momento en la trascendencia del resultado alcanzado. Más allá de la verificación formal, el teorema de Stokes establece un puente conceptual entre el cálculo diferencial (análisis local), representado por la derivada exterior, y el cálculo integral (comportamiento global) de las formas diferenciales a través de la integración sobre el borde de la variedad. Cómo se ha comentado, en términos intuitivos, este resultado puede entenderse como una generalización natural del *segundo teorema fundamental del cálculo* 2.10.161: del mismo modo que la integral de una derivada en un intervalo cerrado depende únicamente de los valores de la función en la frontera, la integral de la derivada exterior de una forma sobre una variedad depende únicamente de los valores de la forma en el borde de dicha variedad. De este modo, el teorema de Stokes no es solo una conclusión elegante de la maquinaria teórica desarrollada hasta ahora, sino que también proporciona una conexión entre el cálculo diferencial e integral que permite reinterpretar numerosos resultados clásicos del análisis vectorial en un lenguaje más general de la geometría diferencial.

Incluiremos ahora los primeros corolarios interesantes de este teorema.

Corolario 2.10.163. *Sea M una variedad diferenciable sin borde, compacta, orientable y de dimensión n. Entonces la integral de toda n forma exacta sobre M es 0.*

Este corolario resulta útil, entre otras cosas, como herramienta para estudiar si una determinada forma de grado máximo sobre una variedad sin borde es, o no, exacta. En particular, si *la integral de la forma es no nula, esta no puede ser exacta*.

Corolario 2.10.164. *Sea M una variedad diferenciable con borde, compacta, orientable y de dimensión n. Entonces, si ω es una $(n-1)$-forma cerrada sobre M, se tiene que*

$$\int_{\partial M} \omega = 0\,.$$

Análogamente al resultado anterior, en caso de que M sea una variedad con borde, uno puede investigar si una $(n-1)$-forma es cerrada calculando la integral de esta sobre la frontera de la variedad. Así, en caso de que *la integral de la (n-1)-forma sobre el borde sea distinta de 0, esta no puede ser cerrada*.

Con el objetivo de allanar el terreno al lema de Poincaré, se estudiará en detalle un ejemplo de forma cerrada, pero no exacta. En particular, demostraremos que la 2-forma definida en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ por

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,$$

es cerrada pero no exacta. Así, más adelante se mostrará que la razón de que ω sea cerrada pero no exacta tiene mucho que ver con la topología del espacio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Más en particular, con el «*agujero*» que hay en el punto $(0,0,0)$.

3.5 Formas conservativas

En esta sección trataremos con la noción de *forma conservativa*. Antes de comenzar, conviene animar al estudiante a plantearse el siguiente problema:

La noción clásica de campo conservativo se refiere a aquellos campos de vectores, como funciones de varias variables, cuyo rotacional es 0*. En este contexto, este hecho está íntimamente relacionado con la existencia de un potencial, es decir, una función cuyo gradiente es el campo de vectores en cuestión. En base a la ecuación* (2.23)*, ¿cómo se podría definir el concepto de «forma conservativa»? ¿Cómo se puede extrapolar la «existencia de potencial»?*

Consideremos la variedad $M = \mathbb{H}^2 \setminus \{(0,1)\}$ y la siguiente 1-forma en M:

$$\eta = \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2}\mathrm{d}x \; - \; \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}\mathrm{d}y\,,$$

donde (x, y) son las coordenadas globales de $\mathbb{H}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta &= \frac{2x\,(y-1)}{\left(x^2 + (y-1)^2\right)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{2x\,(y-1)}{\left(x^2 + (y-1)^2\right)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Es decir, η es cerrada. Por otro lado, tomemos la circunferencia de dimensión 1, $\mathbb{S}^1(0,1)$, con centro $(0,1)$, y el camino $\gamma : [0, 2\pi] \to M$ dado por

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta + 1)\ .$$

Entonces, la restricción de γ a $[0, 2\pi)$ es una parametrización de la circunferencia $\mathbb{S}^1(0,1)$. Además, $\gamma^*\eta = \mathrm{d}\theta$ es una 1-forma cerrada en $[0, 2\pi]$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1(0,1)} i^*_{\mathbb{S}^1(0,1)}\eta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\mathrm{d}(\cos\theta) - \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\mathrm{d}(\sin\theta) \right) \\ &= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = -2\pi\,, \end{aligned}$$

donde $i_{\mathbb{S}^1(0,1)} : \mathbb{S}^1(0,1) \hookrightarrow M$ es la aplicación inclusión. No obstante, por la conmutatividad de la diferencial exterior con el pullback, si η fuera exacta sobre M, $i^*_{\mathbb{S}^1(0,1)}\eta$ también lo sería sobre $\mathbb{S}^1(0,1)$. Sin embargo, dado que $\mathbb{S}^1(0,1)$ no tiene borde, esto contradeciría el corolario 2.10.163.

Esto nos muestra alguna pista de cómo utilizar el corolario 2.10.163 para comprobar que una 1-forma no es exacta. Sea $\gamma : [a, b] \to M$ un camino cerrado sobre una variedad M tal que $\gamma([a, b])$ es una variedad de dimensión 1, $\gamma : [a, b) \to M$ es una parametrización, y la inclusión $i_{\gamma([a,b])} : \gamma([a, b]) \hookrightarrow M$ es diferenciable. Entonces, utilizando el corolario 2.10.163, se tiene que toda 1-forma η exacta satisface que

$$\int_\gamma \eta \; = \; 0\,.$$

Definición 2.10.165 (Forma conservativa)**.** *Sea M una variedad orientable. Una 1-forma es* ***conservativa*** *si*

$$\int_\gamma \eta \;=\; 0\,,$$

para todo camino cerrado γ diferenciable a trozos.

Esta terminología proviene de la física, donde un campo de fuerzas se denomina *conservativo* si el cambio en la energía causado por la fuerza al actuar a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero (*la energía se conserva*). Recordemos que una curva $\gamma : I \to M$ es diferenciable a trozos si es diferenciable en todo punto, salvo en un número finito de ellos. **Se muestra ahora al estudiante una manera equivalente (quizá más intuitiva) de entender las formas conservativas**.

Proposición 2.10.166. *Sea M una variedad orientable. Una 1-forma η es conservativa si y solo si*

$$\int_\gamma \eta \;=\; \int_{\overline{\gamma}} \eta,$$

para cualesquiera dos caminos diferenciables a trozos $\gamma, \overline{\gamma} : [a,b] \to M$ tales que $\gamma(a) = \overline{\gamma}(a)$ y $\gamma(b) = \overline{\gamma}(b)$.

En otras palabras, una forma diferencial es conservativa si y solo si *su integral de línea se conserva con el cambio de camino.*

Teorema 2.10.167 (Teorema fundamental de la integral de línea)**.** *Sea M una variedad diferenciable, $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, y $\gamma : [a,b] \to M$ un camino diferenciable a trozos. Entonces,*

$$\int_\gamma \mathrm{d}f \;=\; f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Demostración. Notemos que

$$\int_\gamma \mathrm{d}f \;=\; \int_a^b (f \circ \gamma)'\,\mathrm{d}t\,,$$

de modo que el resultado es una aplicación directa del segundo teorema fundamental del cálculo 2.10.161. $\square$

Así, el definición 2.10.167 implica que *toda 1-forma exacta es conservativa*; veamos que, de hecho, el recíproco también es cierto. **Se prueba ahora otros de los resultados importantes del texto básico**.

Teorema 2.10.168. *Sea M una variedad diferenciable. Una forma diferencial es conservativa si y solo si es exacta.*

De esta manera, en base al definición 2.10.168, para probar que una forma no es exacta, basta encontrar un camino cerrado diferenciable a trozos de tal manera que la integral de línea sea no nula. En la siguiente sección se darán ciertas «*pistas*» de cómo detectar dónde debemos construir estos caminos.

Observemos, además, que (de nuevo), aunque no se incluye la prueba del teorema, conviene resaltar que aporta más información de la que está en el enunciado. De hecho, en caso de tener una forma exacta (o conservativa) η, la función $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ dada por

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \eta\,, \tag{2.51}$$

para un $x_0 \in M$ fijado, satisface la identidad $\eta = \mathrm{d}f$. En otras palabras, la demostración de este teorema nos aporta herramientas para construir un potencial específico de η. Resulta relevante destacar que, análogamente al teorema de Stokes 2.10.162, el teorema 2.10.168 supone una conexión entre el cálculo diferencial (*forma exacta*) y el cálculo integral (*forma conservativa*). Para el estudio de k-formas diferenciales con $k > 1$, recurriremos al *lema de Poincaré*, cuya exposición y análisis se desarrollarán en la siguiente sección.

3.6 Lema de Poincaré

Estudiaremos, en esta sección, otro de los resultados destacables del curso: el lema de Poincaré. Debido a la importancia del problema de *exactitud* de una k-forma diferencial, sería deseable tener una herramienta *sencilla* para tratar con esta cuestión. Disponemos ya una condición necesaria muy simple: *toda k-forma exacta es cerrada.* De manera específica, una k-forma η es cerrada si sus coordenadas locales satisfacen

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial\left(\eta_{i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_k}\right)}{\partial x^{i_j}} = 0\,, \tag{2.52}$$

para todo $1 \leq i_1 < \cdots i_{k+1} \leq n$. Así, la ecuación (2.52) es una condición necesaria para η sea exacta. *El objetivo principal de esta sección será estudiar el recíproco para el caso general.*

Antes de nada, dado que no hay ninguna otra asignatura del grado que lidie con este tema, tendremos que empezar tratando con una noción fundamental en topología llamada *homotopía*. Desde un punto de vista intuitivo, dos aplicaciones continuas se dirán ***homótopas*** si es posible deformar de forma continua la una en la otra sin producir saltos ni rupturas (figura 2.31).

Definición 2.10.169 (Homotopía)**.** *Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon X \to Y$ aplicaciones continuas entre los espacios topológicos X e Y. Una **homotopía entre f y g** es una aplicación continua $H\colon X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Dos aplicaciones se dicen **homótopas** si existe una homotopía entre ellas.*

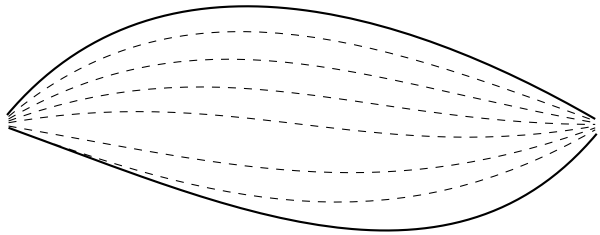


Figura 2.31: Homotopía de f a g.

Sea M una variedad diferenciable. Obsérvese que, dado que tanto $[0,1]$ como M son variedades con borde, en general, el producto $M \times [0,1]$ no es nuevamente una variedad con borde. En realidad, sobre este tipo de productos se introduce de manera natural la estructura más general de *variedad con esquinas* (véase el Apéndice 2). Con el fin de no complicar innecesariamente la exposición, *a lo largo del resto de la sección, salvo indicación contraria, M será considerada como una variedad sin borde, mientras que N podrá ser una variedad diferenciable con o sin borde.*

Definición 2.10.170 (Homotopía diferenciable)**.** *Sean M y N variedades diferenciables, y $f, g\colon M \to N$ dos aplicaciones diferenciables. Diremos que f y g son* ***diferenciablemente homótopas*** *si existe una homotopía diferenciable $H\colon M \times [0,1] \to N$ entre f y g.*

La homotopía (respectivamente, homotopía diferenciable) es una relación de equivalencia (ejercicio 2.70). Esta equivalencia nos permite definir una generalización del concepto de difeomorfismo. En relación con el tema de este texto, es interesante ver cómo la homotopía no modifica el resultado de la integral de una forma cerrada sobre una variedad sin borde.

Proposición 2.10.171. *Sea M una variedad sin borde, compacta y orientable de dimensión n, y sean $f, g\colon M \to N$ dos aplicaciones diferenciables y diferenciablemente homótopas. Entonces, para toda n-forma cerrada η en N, se cumple*

$$\int_M f^*\eta = \int_M g^*\eta\,. \tag{2.53}$$

El siguiente punto será estudiar la relación entre el concepto de homotopía diferenciable y el *pullback*. En particular, para toda $f : M \to N$ una aplicación diferenciable,

Para toda $\eta \in \Omega^k(N)$ cerrada, $f^*\eta$ es cerrada.

Para cada $\eta \in \Omega^k(N)$ exacta, $f^*\eta$ es exacta.

Ahora bien, supongamos que f es diferenciablemente homótopa a otra aplicación diferenciable g, ¿qué podemos decir de f^* y g^*?
En base a la proposición 2.10.171,

$$0 = \int_M f^*\eta - \int_M g^*\eta \ = \int_M (f^*\eta - g^*\eta)$$

Entonces, dado que M no tiene borde, en base al corolario 2.10.163, tendría sentido que $(f^*\eta - g^*\eta)$ fuera una forma exacta. La cuestión ahora es: *¿$f^*\eta - g^*\eta$ es realmente exacta? En caso negativo, ¿bajo qué condiciones $f^*\eta - g^*\eta$ es exacta?*

En caso de ser cierto, debería existir una aplicación h que transforme cada k-forma cerrada η en N en una $(k-1)$-forma $h(\eta)$ en M tal que

$$\mathrm{d}\big(h(\eta)\big) = g^*\eta - f^*\eta\,.$$

El objetivo será construir una aplicación lineal $h : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$ que satisfaga una identidad más general:

$$\mathrm{d}\big(h(\eta)\big) + h(\mathrm{d}\eta) = g^*\eta - f^*\eta\,. \tag{2.54}$$

Notemos que esta identidad implica que la aplicación de h a una k-forma diferencial, resulta en una $(k-1)$-forma diferencial, para todo $k \geq 1$. Obviamente, si η es cerrada, el segundo sumando del término de la izquierda se anula, y se cumple la ecuación buscada. A cualquier h que satisfaga ecuación (2.54) se le denomina ***operador de homotopía entre f^* y g^****. Para cada $t \in [0,1]$, consideremos la inclusión de M en $M \times [0,1]$ a la altura de t:

$$i_t \colon M \ni x \mapsto (x,t) \in M \times [0,1]\ .$$

Lema 2.10.172 (Existencia de un operador de homotopía)**.** *Sea M una variedad diferenciable sin borde. Entonces, existe un operador de homotopía h entre i_0^* e i_1^*.*

Es importante señalar, como se hará en muchas partes del texto base (y se ha hecho en este proyecto docente en más de una ocasión), que la prueba de este resultado es *constructiva*, es decir, que no se prueba únicamente la existencia del operador de homotopía h, sino que se da su forma explícita. Más específicamente, para cada $\eta \in \Omega^k(M \times [0,1])$, se tiene que

$$h(\eta) = \int_0^1 i_t^*(\iota_S\eta)\,\mathrm{d}t$$

donde $S = \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M \times [0,1])$. Esto se traduce en que $h(\eta)$ es la $(k-1)$-forma en M tal que, para cada $x \in M$,

$$\{h(\eta)\}(x) = \int_0^1 \{i_t^*(\iota_S\eta)\}(x)\,\mathrm{d}t\,,$$

donde $\{i_t^* (\iota_S \eta)\} (x)$ se entiende como un camino sobre el espacio vectorial $\bigwedge^{k-1} (\mathsf{T}_x^* M)$ cuyo dominio es $[0,1]$.

Sean ahora f y g dos aplicaciones diferenciablemente homótopas vía la homotopía diferenciable $H\colon M \times [0,1] \to N$, esto es,

$$i_0 \circ H = f\,, \quad i_1 \circ H = g\,.$$

De este modo, para cada $\eta \in \Omega^k (N)$, se tiene que

$$\begin{aligned} g^*\eta - f^*\eta &= (H \circ i_1)^* \eta - (H \circ i_0)^* \eta \\ &= i_1^* H^* \eta - i_0^* H^* \eta \\ &= \mathrm{d}\left(h\left(H^*\eta\right)\right) + h\big(\mathrm{d}\left(H^*\eta\right)\big) \end{aligned}$$

En particular, si η es cerrada, esto implica lo siguiente:

Corolario 2.10.173. *Sean M y N dos variedades diferenciables sin borde, y sean $f, g : M \to N$ dos aplicaciones diferenciablemente homótopas. Entonces, para toda $\eta \in \Omega^k (N)$ cerrada, $g^*\eta - f^*\eta$ es exacta.*

Definición 2.10.174. *Una aplicación diferenciable $f\colon M \to N$ se dice **equivalencia diferenciable de homotopía** si existe otra aplicación diferenciable $g\colon N \to M$ tal que $f \circ g$ es diferenciablemente homótopa a la identidad Id_N en N, y $g \circ f$ es diferenciablemente homótopa a la identidad Id_M en M. En estas condiciones, a g se le denomina **inversa homotópica de f**.*

Todo difeomorfismo $f\colon M \to N$ es una equivalencia diferenciable de homotopía, y su inversa homotópica es f^{-1}. Sin embargo, no toda equivalencia diferenciable de homotopía es un difeomorfismo. Como contraejemplo, se estudiará la aplicación inclusión $i_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que es una equivalencia diferenciable de homotopía, pero no un difeomorfismo.

Definición 2.10.175. *Una variedad diferenciable M se dice **contráctil a** $x_0 \in M$ si existe una homotopía diferenciable $H : M \times [0,1] \to M$ de tal manera que, para todo $x \in M$,*

$$\begin{aligned} H(x,1) &= x\,, \\ H(x,0) &= x_0\,. \end{aligned}$$

En otras palabras, M es contráctil si la identidad es diferenciablemente homótopa a la aplicación constante (en x_0). De manera intuitiva, puede imaginarse una variedad contráctil observando cómo la imagen de aplicación identidad (M) se deforma gradualmente hasta convertirse en la imagen aplicación constante en un punto fijo $x_0 \in M$. En este sentido, decir que una variedad M es contráctil *implica que puede deformarse de diferenciablemente hasta reducirse a un solo punto.* Así, una variedad

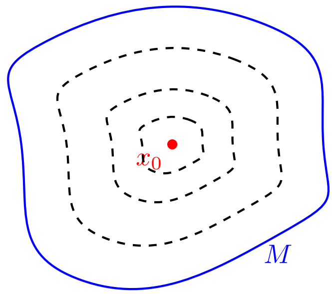


Figura 2.32: Imagen intuitiva de la contracción de M a x_0.

contráctil puede entenderse como un espacio cuya estructura topológica no presenta obstrucciones fundamentales, en el sentido de que toda su complejidad global puede plegarse sin rupturas en torno a un único punto.
Cabe destacar que la condición de ser contráctil no depende del punto (ejercicio 2.71).

De esta manera, hemos desarrollado ya las herramientas necesarias para demostrar el mencionado lema de Poincaré.

Lema 2.10.176 (Lema de Poincaré)**.** *Sea M una variedad sin borde contráctil. Entonces, para $k \geq 1$, toda k-forma cerrada sobre M es exacta.*

Demostración. Por definición, M es contráctil si la identidad Id_M es diferenciablemente homótopa a la aplicación constante (en x_0) $c_{x_0} : M \to M$. Utilizando el definición 2.10.173, para toda forma cerrada η en M, se tiene que $\mathrm{Id}_M^* \eta - c_{x_0}^* \eta$ es exacta. Ahora bien, el *pullback* de la identidad es la identidad, y el *pullback* de la aplicación constante es 0, es decir, $\mathrm{Id}_M^* \eta - c_{x_0}^* \eta = \eta$. □

Específicamente, sea M una variedad contráctil, y $H : M \times [0,1] \to M$ la homotopía entre la identidad y la aplicación constante. Entonces, para toda forma cerrada η en M, se tiene que

$$\eta = \mathrm{d}\left(h\left(H^* \eta\right)\right) \tag{2.55}$$

Dicho de otro modo, el potencial de η se construye combinando h con el *pullback* de la homotopía.

Un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ es ***estrellado*** si, para todo punto $x \in U$, se verifica que existe un $c \in U$ tal que el segmento de la recta que une el punto x con el c está contenido en U (figura 2.33). En el ejercicio 2.76 se probará lo siguiente:

Corolario 2.10.177. *Para $k \geq 1$, toda k-forma sobre un subconjunto abierto estrellado de $\mathbb{R}^n$ cerrada es exacta.*

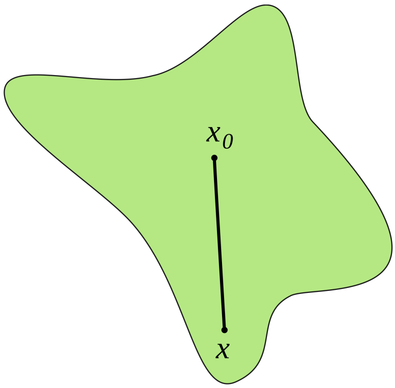


Figura 2.33: Dominio estrellado. Fuente: Wikimedia Commons.

Como consecuencia directa de este corolario, se prueba que toda forma cerrada en $\mathbb{K}^n$ es exacta, para $k \geq 1$. De esta manera, en los espacios «*modelo*» de nuestras variedades podemos encontrar un potencial para cada forma cerrada.

Corolario 2.10.178 (Exactitud local)**.** *Sea M una variedad sin borde. Entonces, para $k \geq 1$, toda k-forma cerrada es localmente exacta. Es decir, para cada $\eta \in \Omega^k(M)$ cerrada y cada $x \in M$, existe un entorno abierto U de x tal que la restricción $\eta|_U$ es exacta.*

Demostración. Todo punto de M tiene una base de entornos abiertos dada por preimágenes de bolas abiertas por las cartas locales. Estas preimágenes son entonces contráctiles. □

Con esto, para cada $\eta \in \Omega^k(M)$ cerrada, con $k \geq 1$, y cada $x \in M$, existe un entorno abierto U de x tal que la restricción $\eta|_U$ satisface que

$$\eta|_U = \mathrm{d}\omega_U ,$$

con $\omega_U \in \Omega^{k-1}(U)$. Uno podría entonces imaginar que, tomando un recubrimiento de M, y realizando esta operación en cada uno de lo abiertos, podemos definir una $(k-1)$-forma ω a trozos como ω_U en cada uno de los abiertos U. No obstante, el problema principalmente radica en que, generalmente, no podemos asegurar que estas $(k-1)$-formas locales «*pegan*» bien, es decir, forman una forma global.

El lema de Poincaré 2.10.176 ya nos da una pista de que la obstrucción para construir dicha $(k-1)$-forma global será *topológico* (contráctil). Como se ha comentado, uno puede imaginar un espacio contráctil como aquel que se «*deforma diferenciablemente*» en un punto. Para visualizar esta idea, imaginemos un trozo de goma flexible que puede ser deformado sin romperse ni pegarse, hasta que toda su masa se concentra en un punto específico. Es sencillo, entonces, intuir que el obstáculo que podemos encontrar que impida dicha deformación del espacio en un punto pueden ser los «*agujeros*». Volvamos al. Aquí se probó que ω, la 2-forma definida en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ por

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,$$

es cerrada, pero no es exacta. El motivo se apoya fuertemente en el hecho de que la ausencia de $(0,0,0)$ impide que el espacio sea contráctil y, por esta razón, para comprobar la falta de exactitud se toma una superficie que *rodea* al $(0,0,0)$.

Los resultados probados plantean una posible **estrategia para lidiar con el problema de exactitud de formas cerradas**. Específicamente, dada $\eta \in \Omega^k(M)$ cerrada, se busca estudiar si η es exacta. Para ello, podemos proceder como sigue:

Paso 1: Desde un punto de vista intuitivo, analizar la topología del espacio. Específicamente, intentar «*identificar huecos*», tales como el $(0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Paso 2: Hay dos escenarios posibles:

- *Si no se identifican huecos en el espacio*, tratar de probar que el espacio es contráctil. Con este objetivo, eventualmente podría resultar útil probar con una variación de la aplicación dada por «*unión de segmentos*», es decir,

$$H(x,t) = tx_0 + (1-t)\,x\,.$$

  Observemos que esta aplicación, en caso de estar bien definida en nuestro espacio, es una homotopía entre la constante c_{x_0} y la identidad.
- *Si se identifican agujeros*, la intuición dicta que los problemas estarán alrededor de ellos. El siguiente paso es buscar rodearlos por variedades cuya integración resulte sencilla (un ejemplo podrían ser las esferas y tratar de utilizar el corolario 2.10.163 para probar que η no es exacta.

Paso 3: *Si M es contráctil*, existe una homotopía $H : M \times [0,1] \to M$ entre la identidad y la aplicación constante. Entonces, el potencial de η se construye explícitamente como

$$\omega = h\,(H^*\eta)\,. \tag{2.56}$$

Paso 4: *Si M no es contráctil, pero η es una* 1*-forma*. En este caso podemos estudiar si η es conservativa y, en caso afirmativo, se puede utilizar la ecuación (2.51):

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \eta\,, \quad \eta = \mathrm{d}f\,.$$

En punto acaba, formalmente, la teoría que compone la asignatura. Así, únicamente quedará por presentar una serie de ejercicios y los dos apéndices comentados.

3.7 Ejercicios

Ejercicio 2.61

Buscar un ejemplo de variedad M con dos cartas globales $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}^n$ de tal manera que

$$\operatorname{Vol}(\varphi(M)) \neq \operatorname{Vol}(\psi(M)) .$$

Ejercicio 2.62

Sea M una variedad diferenciable compacta. Demostrar que, dadas dos cartas globales $\varphi : M \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ y $\psi : M \to \widehat{V} \subseteq \mathbb{K}^n$ de M, se tiene

$$\int_{\widehat{U}} {\varphi^{-1}}^* \omega = \pm \int_{\widehat{V}} {\psi^{-1}}^* \omega ,$$

cuyo signo es $-$ si las cartas tienen diferente orientación, y $+$ si tienen la misma orientación.

Ejercicio 2.63

Consideremos un par de recubrimientos abiertos por cartas locales $\mathcal{F} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ y $\mathcal{G} := \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ de M, y sendas particiones de la unidad diferenciables $\{f_i\}_{i=1}^m$ y $\{g_i\}_{i=1}^r$ subordinada a las familias $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Probar que la familia de funciones dada por los productos $f_i \cdot g_j$, define una partición de la unidad diferenciable cuyos soportes están contenidos en los abiertos dados por las intersecciones $U_\alpha \cap V_\beta$.

Ejercicio 2.64

Sea $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ un difeomorfismo creciente entre dos intervalos cerrados de $\mathbb{R}$. Demostrar que, en tal caso,

$$\int_{[a,b]} \varphi^* \eta = \int_{[c,\mathrm{d}]} \eta, \ \forall \eta \in \Omega^1([c, \mathrm{d}]) .$$

Por otro lado, probar que si φ es un difeomorfismo decreciente se tiene

$$\int_{[a,b]} \varphi^* \eta = -\int_{[c,\mathrm{d}]} \eta, \ \forall \eta \in \Omega^1([c, \mathrm{d}]) .$$

Ejercicio 2.65

Sea $\gamma : [a, b] \to M$ un camino diferenciable sobre una variedad M, y $\eta \in \Omega^1(M)$. Probar que, para toda aplicación diferenciable $F : M \to N$, se tiene que

$$\int_\gamma F^* \eta \ = \ \int_{F \circ \gamma} \eta .$$

Ejercicio 2.66

Sean $\gamma : [a, b] \to M$ y $\hat{\gamma} : [c, d] \to M$ dos caminos simples cerrados tales que $\gamma([a, b]) = \hat{\gamma}([c, d])$. Probar que si $\gamma(a) \neq \hat{\gamma}(c)$, C es una variedad sin borde de dimensión 1.

Ejercicio 2.67

Sea M una variedad diferenciable y $\gamma : [a, b] \to M$ un camino constante. Demostrar que

$$\int_\gamma \eta \ = \ 0, \quad \forall \eta \in \Omega^1(M)$$

Ejercicio 2.68

Probar que toda superficie es una variedad de dimensión 2.

Ejercicio 2.69

En el [18] se define una ***superficie parametrizada*** (de clase $\mathcal{C}^\infty$) como la imagen de una aplicación diferenciable $\Phi \colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con D un dominio de $\mathbb{R}^2$. Se dice que la superficie es regular en todo punto si $\frac{\partial}{\partial r^1} \times \frac{\partial}{\partial r^2} \neq 0$ en todo punto del dominio. Prueba que, en caso de que D sea dominio regular, toda superficie parametrizada regular es una superficie.

Ejercicio 2.70

Comprobar que la homotopía es una relación de equivalencia.

Ejercicio 2.71

Probar que la condición de ser contráctil no depende del punto. En otras palabras, si una variedad M es contráctil a $x_0 \in M$, entonces M es contráctil a cualquier otro $y_0 \in M$.

Ejercicio 2.72

Sean (w, x, y, z) coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^4$ y consideremos al 2-toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ con la orientación inducida por la orientación estándar en $\mathbb{S}^1$. Dada la 2-forma

$$\omega = xyz\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}y\,, \tag{2.57}$$

calcular la integral $\int_{\mathbb{T}^2} \omega$.

Ejercicio 2.73

Sean M y N dos variedades sin borde compactas y orientadas, y $F, G \colon M \to N$ dos difeomorfismos homótopos. Probar que o bien F y G ambos preservan la orientación, o bien ambos cambian la orientación.

Ejercicio 2.74

Considérese la $(n-1)$-forma ω en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por

$$\omega = \|x\|^{-n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} r^i \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}r^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n, , \tag{2.58}$$

donde $\widehat{\mathrm{d}r^i}$ denota la omisión de $\mathrm{d}r^i$. Probar que ω es cerrada, pero no es exacta.

Ejercicio 2.75

Sea M una variedad y $\eta \in \Omega^1(M)$. Demostrar que η es exacta si y solo si

$$\int_\gamma \eta = \int_{\tilde{\gamma}} \eta \tag{2.59}$$

para todo par de curvas $\gamma, \tilde{\gamma} \colon [a, b] \to M$ con $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$ y $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$.

Ejercicio 2.76

Demostrar que para cada $k \geq 1$, toda k-forma sobre un subconjunto U abierto estrellado de $\mathbb{R}^n$ cerrada es exacta.

Ejercicio 2.77

Probar que no existen formas de volumen exactas sobre variedades compactas.

Apéndice 1.- Aplicaciones

Aplicaciones

Dado que los apéndices no forman parte del contenido evaluable de la asignatura, y siguiendo la narrativa que se ha utilizado en la concreción del contenido teórico de la asignatura (de más detallado en el primer tema, a menos en el segundo y tercer tema), nos limitaremos únicamente a especificar los puntos importantes (para más detalle véase [13]).

Este apéndice pretende ilustrar la relevancia de la teoría presentada en los capítulos anteriores, haciendo especial énfasis en las aplicaciones del Teorema de Stokes en variedades (2.10.162), resultado central del texto base de la asignatura.

Este apéndice se muestra al estudiante para responder la, más que usual, pregunta en matemáticas de *¿Para que sirve todo esto?* Además, se pretende conectar este resultado con resultados importantes de otras áreas, maximizando así el aprendizaje significativo del estudiante.

Naturalmente, para comprender adecuadamente este apéndice se han de haber leído en profundidad previamente todos los anteriores. En particular, se utilizará repetidas veces el teorema de Stokes definición 2.10.162. Además, es importante haber comprendido la noción de homotopía (véanse la Sección 2.10.6 o las referencias [17, 20]). Finalmente, aunque se repasa someramente, se recomienda que el estudiante esté familiarizado con el plano complejo para probar el teorema fundamental del álgebra.

Las aplicaciones mostradas en este apéndice se resumen en las siguientes:

1. **Teorema** (Stokes en superficies). Sea S una superficie compacta y orientable cuya orientación viene determinada por un campo de vectores normal y unitario N a lo largo de S. Entonces, para todo campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S, se satisface que

$$\int_S \nabla \times X \;=\; \int_{\partial S} \langle X, T\rangle \;\mathrm{d}s\,.$$

Aquí, T es el único ***campo de vectores unitario y tangente a*** ∂S positivamente orientado respecto a la orientación inducida sobre el borde ∂S.

Localmente, esta igualdad se resume como sigue. Supongamos que existe una carta global $\varphi = \left(x^1, x^2\right) : S \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{K}^2$. Entonces, para todo campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S, se satisface que

$$\int_{\partial S} \langle X, T\rangle \;\mathrm{d}s = \pm \int_I \left\langle X, \frac{\partial}{\partial x^1}\right\rangle \;\mathrm{d}t = \pm \int_I X^i \cdot \frac{\partial r^i}{\partial x^1}\;\mathrm{d}t\,,$$

donde $X = X^i \frac{\partial}{\partial r^i}$. El signo de la integral es positivo si φ está positivamente orientada, y negativo en caso de que φ esté negativamente orientada.

Recordemos que, dada una carta local $\left(U \cap S, \varphi_U = \left(x^i\right)\right)$ sobre S positivamente orientada y un campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S, se tiene que la ecuación (2.46), i.e.,

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{U}} \nabla \times X = \int_{\widehat{U}} \Bigg(& \left(\frac{\partial X^3}{\partial r^2} - \frac{\partial X^2}{\partial r^3}\right) \left[\frac{\partial r^2}{\partial x^1}\frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1}\frac{\partial r^2}{\partial x^2}\right] \\ & - \left(\frac{\partial X^1}{\partial r^3} - \frac{\partial X^3}{\partial r^1}\right) \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1}\frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1}\frac{\partial r^1}{\partial x^2}\right] \\ & + \left(\frac{\partial X^2}{\partial r^1} - \frac{\partial X^1}{\partial r^2}\right) \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1}\frac{\partial r^2}{\partial x^2} - \frac{\partial r^2}{\partial x^1}\frac{\partial r^1}{\partial x^2}\right]\Bigg) \circ \varphi_U^{-1} \; \mathrm{d}r^1 \mathrm{d}r^2 \\ = \int_{\partial S} \langle X, T\rangle \; \mathrm{d}s = \int_I \left\langle X, \frac{\partial}{\partial x^1}\right\rangle \; \mathrm{d}t = \int_I X^i \cdot \frac{\partial r^i}{\partial x^1} \; \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{A.1}$$

Esta expresión remite a la formulación de este teorema tal como se puede encontrar en [18] (texto básico de las asignaturas de cálculo en una y varias variables del grado de Matemáticas).

2. **Teorema** (Green). Sea D un dominio regular compacto, y $P, Q : D \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Entonces,

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{A.2}$$

3. **Teorema** (Divergencia). Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regular de dimensión 3 compacto. Si $X \in \mathfrak{X}(K)$ es un campo de vectores, entonces

$$\int_K \operatorname{div}(X)\, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z = \int_{\partial K} X\,. \tag{A.3}$$

4. **Teorema** (Punto fijo de Brouwer). Sea $f \colon \bar{B}_1^n(0) \to \bar{B}_1^n(0)$ una aplicación diferenciable. Entonces, f tiene un punto fijo, esto es, existe un punto $x \in \bar{B}_1^n$ tal que $f(x) = x$.

5. **Teorema** (Bola peluda). Todo campo de vectores en una esfera de dimensión par $\mathbb{S}^{2n}$ se anula en algún punto.

6. **Teorema** (Fundamental del álgebra). Todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos tiene n raíces complejas (contando tantas veces cada raíz como multiplicidad tenga esta).

Ejercicios

Ejercicio A.1

Comprobar que la aplicación

$$H\colon \mathbb{S}^{2n} \times [0,1] \ni (x,t) \mapsto \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)X(x)$$

es una homotopía diferenciable entre las aplicaciones identidad y antipodal ($s \mapsto -x$) en la $2n$-esfera.

Ejercicio A.2

Calcular las siguientes integrales:

I) $\int_M (xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + 2yz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + 2xz\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ en $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = a^2\,, z \geq 0\right\}$ para un $a \in (0,\infty)$.

II) $\int_{\mathbb{S}^2} (x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$.

III) $\int_{\partial M} \left[(y-z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right]$ con $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq z^2 \text{ y } 0 \leq z \leq 1\right\}$.

IV) $\int_M \left(\cosh(x_3)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_4 e^{x_4^2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4\right)$ en $M = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} + \frac{x_4^2}{d^2} = 1\right\}$ con a,b,c,d constantes reales positivas.

Ejercicio A.3

Obtener las fórmulas del volumen y el área de la n-esfera y relacionarlas mediante el teorema de Stokes. Hacer lo mismo para un elipsoide con semiejes de longitud arbitraria.

Ejercicio A.4

Sea M una variedad sin borde de dimensión par $2n$. Una forma simpléctica ω en M es una 2-forma cerrada tal que

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ veces}} \tag{A.4}$$

es una forma de volumen en M. Demostrar que si ω es exacta, entonces M no puede ser compacta.

Ejercicio A.5

Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, siempre existe un punto $x \in \mathbb{S}^2$ tal que, independientemente del sistema de coordenadas $\left(x^i\right)$ utilizado, se cumple que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x = 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Ejercicio A.6

I) Sean $P\,(x,y) = x^2$ y $Q\,(x,y) = y^2$ definidas en el dominio regular encerrado entre los caminos $y = x^2$ y la recta $y = 1$ denotada por $\overline{D}$ (frontera incluida). Calcular la integral de línea $\int_{\partial\overline{D}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.

II) Sea $F\,(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (-y, x)$. Calcular la integral $\int_{\mathbb{S}^1_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, donde $\mathbb{S}^1_2$ es la circunferencia en el plano de radio 2 y centro 0.

III) Sea $F\,(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y, x + y)$. Calcular la integral $\int_{\partial\overline{R}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, donde $\overline{R}$ define la región limitada por el triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ (frontera incluida).

IV) Sea C el camino cerrado que es el borde de la región R delimitada por la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Calcular el área de la región R.

Ejercicio A.7

I) Sea $X\,(x,y,z) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ un campo de vectores definido en $\mathbb{R}^3$, y sea $\overline{B}^3_R\,(0,0,0)$ la bola de radio $R > 0$ centrada en el origen. Usando el teorema de la divergencia, calcular la integral de superficie de X sobre la frontera de $\overline{B}^3_R\,(0,0,0)$.

II) Sea $X\,(x,y,z) = \frac{1}{||(x,y,z)||^3}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$ un campo de vectores en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Considerar la región $\mathbb{S}^2_R$ que es la esfera de radio R centrada en el origen. Calcular la integral de superficie de X sobre la frontera de $\mathbb{S}^2_R$.

III) Considerar el campo de vectores dado por $X = x\frac{\partial}{\partial x} + e^{x^2+\sqrt{3}z}\frac{\partial}{\partial y} + \cos\left(\sqrt{\sqrt{3}x^2 + y^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}$ y S el toro que se obtiene de revolucionar el círculo $(y-3)^2 + z^2 = 4$ alrededor del eje z. Calcular la integral de X sobre S.

Ejercicio A.8

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regular de dimensión 3 compacto y orientable. Comprueba que el conjunto de campos vectoriales $X \in \mathfrak{X}(K)$ cuya divergencia es constante es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Probar, en base al teorema de la divergencia, que, salvo aquellos cuya divergencia es 0, cualquiera de estos campos de vectores permite calcular el volumen de K.

Comprobar que la integral coincide con el volumen de la esfera cuando K es la bola unidad de centro $(0,0,0)$ y radio 1.

Ejercicio A.9

Sea $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}$ un campo de vectores definido en $\mathbb{R}^3$. Considerar la superficie $\mathbb{S}_2^{2+}$ que es la parte de la esfera de radio 2 centrada en el origen contenida en el semiespacio superior $z \geq 0$. Sea $\partial\mathbb{S}_2^{2+}$ el borde de $\mathbb{S}_2^{2+}$, es decir, el círculo en el plano $z = 0$ con radio 2. Calcular la integral de línea del campo X a lo largo de $\partial\mathbb{S}_2^{2+}$.

Ejercicio A.10

Sea $X = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + y^2\frac{\partial}{\partial z}$ un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$. Considerar la superficie S que es la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ situada por encima del plano $z = 1$. Calcular $\int_S \nabla \times X$.

Ejercicio A.11

Calcular el área de las siguientes superficies obtenidas como imagen de las siguientes aplicaciones:

i) $\varphi : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$\varphi(\rho,\theta) = \left(\rho\cos\theta, \rho^2, \rho\sin\theta\right) .$$

ii) $\psi : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$\varphi(\phi,\theta) = (\phi, \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta) .$$

Apéndice 2.- Variedades con esquinas

Variedades con esquinas

Se seguirá aquí un enfoque análogo al apéndice anterior; únicamente se mostrarán los puntos importantes. Aquí se introduce el concepto de variedad con esquinas, una generalización natural de las nociones clásicas de variedad diferenciable, con o sin borde. El objetivo es extender el formalismo de la integración a este contexto más amplio. Aunque las variedades con esquinas incluyen como casos particulares tanto las variedades sin borde como aquellas con borde, se ha optado por tratar este tema en un apéndice debido a la mayor sofisticación técnica que exige su estudio.

En este apendice se seguirá la siguiente dinámica:

1. **Estructura de variedad con esquinas**. El primer paso consiste en identificar cuál será el «*espacio modelo*» sobre el que se definirá esta noción, y que proporcione el prototipo geométrico local que permita capturar tanto la presencia de *borde* como la de esquina. Para ello, resulta natural considerar el ***primer cuadrante*** de $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\mathbb{R}^n_+ \coloneqq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1, \cdots, x_n \geq 0\} \ ,$$

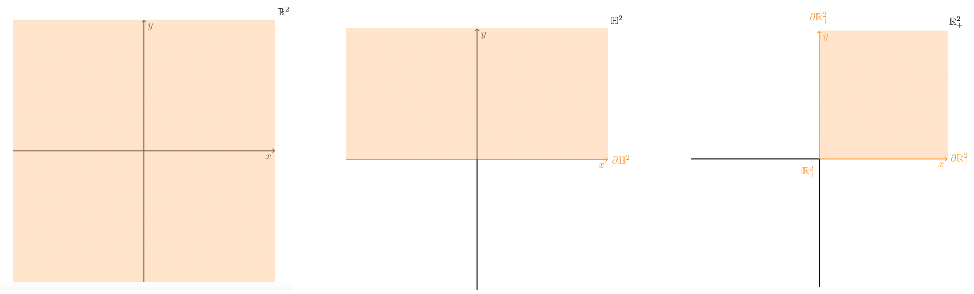
esto es, el subconjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas cartesianas son no negativas. Definimos asimismo el subconjunto

$$\lrcorner\mathbb{R}^n_+ \coloneqq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i = x_j = 0, \text{ para algunos } i \neq j\} \ .$$

A los puntos de $\lrcorner\mathbb{R}^n_+$ se les denomina ***puntos esquina*** o, simplemente, ***esquinas***. Así, análogamente a $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n_+$ se escribe como unión de los puntos del interior y la frontera. Además, las esquinas son subconjuntos de la frontera. Observemos que $\mathring{\mathbb{H}}^n$ y $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$, mientras que $\partial\mathbb{H}^n$, $\partial\mathbb{R}^n_+$, y $\lrcorner\mathbb{R}^n_+$ son cerrados con interior vacío.

Cabe destacar que todo abierto de $\mathbb{H}^n$ o $\mathbb{R}^n_+$ que no contenga puntos frontera es un abierto en $\mathbb{R}^n$ (ejercicio 2.7). Tenemos así tres espacios modelo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ y $\mathbb{R}^n_+$. *A lo largo de este apéndice se utilizará la notación de $\mathbb{K}^n$ que, en este caso, denotará a $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ o $\mathbb{R}^n_+$ según el contexto.* Los espacios modelo en dimensión 2 se ilustran en la Figura A.1.

Definición A.2.0.1 (Variedad diferenciable con esquinas)**.** *Sea M variedad topológica con esquinas de dimensión n. Una **variedad diferenciable con esquinas de dimensión** n es un par $(M, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es un atlas maximal de M formado por cartas cuyos codominios son abiertos de $\mathbb{K}^n$.*



(a) $\mathbb{R}^2$ (b) $\mathbb{H}^2$ (c) $\mathbb{R}^2_+$

Figura A.1: Diferentes formas de $\mathbb{K}^2$ (variedades con esquinas).

2. **Propiedades fundamentales:** Se estudiarán a partir de este punto las propiedades fundamentales de este tipo de variedades, análogas a las demostradas para las variedades con borde en el primer tema.

3. **Integración en variedades con esquinas:** La frontera $\partial\mathbb{R}^n_+$ de $\mathbb{R}^n_+$ no es una variedad con esquinas. Aún así, es posible escribirla como la unión finita de variedades con esquinas. En efecto, definamos los subconjuntos

$$H_i = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid x^i = 0\right\} , \tag{A.5}$$

de modo que

$$\partial\mathbb{R}^n_+ = \bigcup_{i=1}^{n} H_i \, .$$

CadaH_i es una variedad con esquinas de dimensión $n-1$ (ejercicio A.14). Además, las intersecciones $H_i \cap H_j \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid x^i = x^j = 0\right\}$ son variedades de dimensión menor. Este hecho nos permite extender la definición de integral a variedades con esquinas.

Sea M una variedad diferenciable con esquinas de dimensión n compacta y orientable, y sea ω una $(n-1)$-forma en ∂M. Si M puede ser cubierta por una sola carta (M, φ), definimos la integral de ω en ∂M como

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{H_i} \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega \, , \tag{A.6}$$

donde la orientación de H_i es la inducida como frontera de $\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^i \geq 0\}$. Al igual que en el caso de variedades sin esquinas, esta definición puede extenderse mediante particiones de la unidad. Asimismo, la integración por parametrizaciones se generaliza para variedades con esquinas.

4. **Teorema** (Integración por parametrizaciones). Sea M una variedad con esquinas de dimensión n compacta y orientable, con orientación Ω, y sea $\omega \in \Omega^n(M)$. Supongamos que $D_1, \ldots, D_k \subseteq \mathbb{R}^n$ son dominios de integración abiertos tal que, para cada $i = 1, \ldots, k$, existe una aplicación diferenciable $f_i : \overline{D}_i \to M$, definida sobre la clausura de D_i, que cumple que:

    i) La restricción de f_i a D_i es una parametrización de M cuya inversa tiene orientación positiva.

    ii) Si $i \neq j$, $f_i(D_i) \cap f_j(D_j) = \emptyset$.

    iii) $\cup_{i=1}^k f_i\left(\overline{D}_i\right) = M$.

    Entonces,

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} f_i^* \omega$$

5. **Teorema** (Teorema de Stokes para variedades con esquinas). Sea M una variedad diferenciable con esquinas, compacta, orientable y de dimensión n. Sea ω una $(n-1)$-forma sobre M. Entonces,

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega$$

Ejercicios

Ejercicio A.12

Probar que $\mathbb{R}^n_+$ es una variedades topológica con esquinas, con la identidad como carta global.

Ejercicio A.13

Sea M una variedad diferenciable con esquinas de dimensión n. Demostrar que el interior, la frontera de U, y las esquinas están dados por

$$\begin{aligned} \mathring{U} &= U \cap \mathring{M}\,, \\ \partial U &= U \cap \partial M\,, \\ \lrcorner U &= U \cap \lrcorner M\,. \end{aligned}$$

Ejercicio A.14

Demostrar que que $H_i \coloneqq \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid x^i = 0\right\}$ es una variedad con esquinas de dimensión $n-1$.

Ejercicio A.15

Comprueba que las aplicaciones $f_1, \ldots, f_4 \colon [a,b] \to [a,b] \times [a,b]$ satisfacen las hipótesis del teorema de integración por parametrizaciones.

Ejercicio A.16

Sean v y w dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, y sea P el paralelogramo de lados a y b que generan:

$$P = \left\{sv + tw \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [0,a],\, t \in [0,b]\right\}\,.$$

a) Comprueba que P es una variedad con esquinas de dimensión 2, compacta y orientable.

b) Calcula el área de P a partir de la forma de área estándar de $\mathbb{R}^2$.

Soluciones de los ejercicios

Solución del ejercicio 2.2

Por definición, una topología T en X_1 es la más (respectivamente, menos) fina posible si está formada por el mayor (respectivamente, menor) número de subconjuntos de X que cumplen la propiedad buscada. En este caso buscamos que la aplicación $f\colon X_1 \to X_2$ sea continua, esto es, que $f^{-1}(U)$ sea abierto para todo abierto U de X_2. Fijada la topología T_1 en X_1, hemos de asegurar que $f^{-1}(U) \in T_1$ para todo $U \in T_2$. Por ello, la topología más fina posible sobre X_2 que hace a f continua (la topología final) es el conjunto de todos los subconjuntos de X_2 tales que su antiimagen por f sea un abierto en X_1, es decir,

$$T_f = \left\{U \subseteq X_2\colon f^{-1}(U) \in T_1\right\} .$$

Además, hemos de comprobar que T_f cumple los axiomas de la definición de topología; efectivamente,

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(X_2) = X_1 \in T_1 \Longrightarrow X_2 \in T_f ,\\
&f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_1 \Longrightarrow \emptyset \in T_f ,\\
&U_1, \ldots, U_n \in T_f \Longrightarrow f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \in T_1 \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T_f ,\\
&U_\alpha \in T_f \Longrightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(U_\alpha) \in T_1 \Longrightarrow \bigcup_{\alpha} U_\alpha \in T_f ,
\end{aligned}$$

para cualesquiera abiertos $U_i, U_\alpha \in T_f$.

De forma similar, fijada la topología T_2 en X_2, para garantizar que f sea continua, T_1 ha de contener $f^{-1}(U)$ para todo $U \in T_2$. En consecuencia, la topología menos fina posible en X_1 que hace a f continua (la topología inicial) es aquella que únicamente contiene dichos subconjuntos $f^{-1}(U)$, es decir,

$$T^f = \left\{f^{-1}(U) \subseteq X_1\colon U \in T_2\right\} .$$

Comprobamos nuevamente que es una topología:

$$\begin{aligned}
&X_2 \in T_2 \Longrightarrow f^{-1}(X_2) = X_1 \in T^f ,\\
&\emptyset \in T_2 \Longrightarrow f^{-1}(\emptyset) \in T^f ,\\
&U_1, \ldots, U_n \in T_2 \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T_2 \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \in T^f ,\\
&U_\alpha \in T_2 \Longrightarrow \bigcup_{\alpha} U_\alpha \in T_2 \Longrightarrow \bigcup_{\alpha} f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\right) \in T^f ,
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 2.3

Denotemos por T a la topología en X. La topología subespacio T_S de S está dada por

$$T_S = \{U \cap S \ : \ U \in T\} \ .$$

Si (X, T) es Hausdorff, entonces cada par de puntos $x, y \in S \subseteq X$ tienen sendos entornos disjuntos $U_x, U_y \in T$, con $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Por ende, $U_x \cap S$ y $U_y \cap S$ son entornos disjuntos en (S, T_S).

Si (X, T) es segundo contable, entonces tiene una base numerable

$$\mathcal{B} = \{U_n \in T \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Consecuentemente,

$$\mathcal{B}_S = \{U_n \cap S \ : \ U_n \in \mathcal{B}\}$$

es una base numerable de T_S.

Solución del ejercicio 2.7

Si $x \in \mathring{\mathbb{H}}^n = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x^n > 0\right\}$, para cada bola abierta $B^n_\epsilon(x) \subset \mathbb{R}^n$ de centro x y radio $\epsilon < x^n$, se cumple que $y^n > 0$ para todo $(y^1, \ldots, y^n) \in B^n_\epsilon(x)$, es decir, $B^n_\epsilon(x) \subset \mathring{\mathbb{H}}^n$. Por el contrario, cualquier entorno de $x \in \partial\mathbb{H}^n = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x^n = 0\right\}$ contendrá una bola abierta centrada en x y, por lo tanto, necesariamente abarca puntos con $x^n < 0$, es decir, puntos de $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{H}^n$.

Solución del ejercicio 2.8

Recordemos que un espacio afín real viene dado por un conjunto X, un espacio vectorial real $\overrightarrow{X}$ de dimensión n, y una aplicación de la forma

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{\cdot\,\cdot} : & X \times X & \to & \overrightarrow{X} \\ & (a, b) & \mapsto & \overrightarrow{ab} \end{array}$$

de tal manera que,

1) Para todo $a \in X$, y la restricción

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{a\cdot} : & X & \to & \overrightarrow{X} \\ & x & \mapsto & \overrightarrow{ax} \end{array}$$

es biyectiva.

2) Para todo $a, b, c \in X$, se satisface la identidad

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$$

Entonces, para todo punto $a \in X$, la aplicación $\overrightarrow{a\cdot}$ convierte a X en una variedad diferenciable de dimensión n difeomorfa al espacio vectorial $\overrightarrow{X}$. Observemos que, utilizando 2), si se toma otro punto $b \in X$,

$$\overrightarrow{a\cdot} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{b\cdot}$$

Así, si $\overrightarrow{a\cdot}$ es un homeomorfismo para algún $a \in X$, entonces $\overrightarrow{b\cdot}$ es un homeomorfismo para todo $b \in X$. Dicho de otro modo, la *estructura de variedad topológica definida sobre X no depende del punto $a \in X$ elegido para definir la topología de X a través de la topología inicial de $\overrightarrow{a\cdot}$*.

Solución del ejercicio 2.9

Por el ejercicio 2.4, sabemos que U es Hausdorff y segundo contable. Basta entonces comprobar que U es localmente homeomorfo a $\mathbb{K}^n$. Sea (V, φ) una carta cualquiera de M con $U \cap V \neq \emptyset$, es decir, $\varphi \colon V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{K}^n$ es un homeomorfismo de V en su imagen. Por ende, la restricción $\varphi|_U \colon U \cap V \to \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{K}^n$ es también un homeomorfismo en su imagen; de modo que $(U \cap V, \varphi|_U)$ es una carta local de U. Así, basta recubrir U por cartas de este tipo, lo que completa la demostración. Ojo, se está utilizando que $U \cap V$ es un abierto (por serlo U y V) y, por lo tanto, $\varphi(U \cap V)$ también lo es.

Solución del ejercicio 2.12

Por el ejercicio 2.9 ya sabemos que U es una variedad topológica. Ahora hemos de comprobar que además la estructura diferenciable de M induce una estructura diferenciable en U. Sea $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas maximal de M. La compatibilidad de las cartas de $\mathcal{A}$ implica que las aplicaciones

$$\varphi_{V_\alpha}|_U \circ \left(\varphi_{V_\beta}|_U\right)^{-1} : \varphi_{V_\beta}(V_\alpha \cap V_\beta \cap U) \to \varphi_{V_\alpha}(V_\alpha \cap V_\beta \cap U)$$

son diferenciables, de forma que $\mathcal{A}_U = \{(V_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_U)\}$ es un atlas maximal de U.

Solución del ejercicio 2.14

Sea $\varphi_W \colon W \to \widehat{W}$ una carta de M cualquiera. Entonces, $\varphi_W|_U \colon W \cap U \to \varphi_W(U)$ es una carta de U. Por definición, un punto $x \in U \cap W$ será interior si $\varphi_W|_U(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$, y frontera si $\varphi_W|_U(x) \in \partial\mathbb{H}^n$, es decir,

$$\mathring{U} \cap W = \left\{x \in U \cap W \ : \ \varphi_W|_U(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n\right\} ,$$
$$\partial U \cap W = \{x \in U \cap W \ : \ \varphi_W|_U(x) \in \partial\mathbb{H}^n\}$$

Así, se tiene que $\mathring{U} \cap W$ (respectivamente, $\partial U \cap W$) está formado por los puntos interiores (respectivamente, frontera) de M que están contenidos en $U \cap W$, esto es,

$$\mathring{U} \cap W = \mathring{M} \cap U \cap W\,, \qquad \partial U \cap W = \partial M \cap U \cap W\,.$$

Puesto que podemos cubrir M por este tipo de cartas, concluimos que

$$\mathring{U} = \mathring{M} \cap U\,, \qquad \partial U = \partial M \cap U\,.$$

Solución del ejercicio 2.15

Como se vio en el definición 2.10.83, la aplicación $\varphi\colon \Gamma(f) \ni (x,y) \mapsto x \in M$ es un difeomorfismo $\Gamma(f)$ en M. Así, toda carta local (U, φ_U) de M genera una carta local sobre $\Gamma(f)$ dada explícitamente por $\left(\varphi^{-1}(U), \varphi_U \circ \varphi_{|\varphi^{-1}(U)}\right)$. De esta manera construimos la estructura diferenciable de $\Gamma(f)$ de tal manera que los abiertos del tipo $\varphi^{-1}(U)$, con U abierto de M, constituyen una base de la topología.

Por ende, un punto $(x,y) \in \Gamma(f)$ es interior si y solo si existe una carta $\left(\varphi^{-1}(U), \varphi_U \circ \varphi_{|\varphi^{-1}(U)}\right)$ de (x,y), donde (U, φ_U) es una carta de x, tal que,

$$\varphi_U \circ \varphi\left(\varphi^{-1}(U)\right) = \varphi_U(U) \subseteq \mathring{\mathbb{H}}^n$$

En otras palabras, un punto $(x,y) \in \Gamma(f)$ es interior si y solo si x es interior en M. Análogamente, un punto $(x,y) \in \Gamma(f)$ es frontera si y solo si x es frontera en M.

Solución del ejercicio 2.18

Consideremos la aplicación $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dada por $F(x^1,\ldots,x^n) = (a_1x^1,\ldots,a_nx^n)$, con inversa $F^{-1}(y^1,\ldots,y^n) = (y^1/a_1,\ldots,y^n/a_n)$. Está claro que tanto F como F^{-1} son diferenciables.

Observemos que $F(M) = \overline{B}_1^n(0)$ es una variedad de dimensión n (véase definición 2.10.85) y, en consecuencia, F induce una estructura de variedad diferenciable sobre M de dimensión n. Específicamente, para cada una de las cartas locales (U,φ) de $\overline{B}_1^n(0)$, $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ es una carta local de M; la composición de aplicaciones diferenciables es una aplicación diferenciable y la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo. Notemos que $F(\partial M) = \mathbb{S}^{n-1}$ y $F(\mathring{M}) = B_1^n(0)$, con ∂M y $\mathring{M}$ los conjuntos dados en el enunciado:

$$\partial M = \left\{(x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \left(\frac{x^1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x^n}{a_n}\right)^2 = 1\right\},$$

$$\mathring{M} = \left\{(x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \left(\frac{x^1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x^n}{a_n}\right)^2 < 1\right\}.$$

Por lo tanto, $\varphi \circ F(x) \in \partial\mathbb{H}^n$ si $x \in \partial M$ y $\varphi \circ F(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$ si $x \in \mathring{M}$, de modo que ∂M y $\mathring{M}$ son, en efecto, la frontera y el interior de M como variedad, respectivamente.

Solución del ejercicio 2.20

Como se ha demostrado en el ejercicio 2.4, el producto $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ es Hausdorff y segundo contable. Dados sendos atlas $\mathcal{A}_l = \{(U_{l,i_l}, \varphi_{l,i_l})\}$ en M_l,

$l=1,\dots,k$, podemos construir un atlas $\mathcal{A}=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=(i_1,\dots,i_k)}$, en M con $U_i=U_{1,i_1}\times\cdots\times U_{k,i_k}$ y $\varphi_i=(\varphi_{1,i_1},\dots,\varphi_{k,i_k})\colon U_i\to\varphi_i(U_i)$ dado por

$$\varphi_i\left(x_1,\dots,x_k\right)=\left(\varphi_{1,i_1}\left(x_1\right),\dots,\varphi_{k,i_k}\left(x_k\right)\right),\ \forall\left(x_1,\dots,x_k\right)\in M_1\times\cdots\times M_k$$

Efectivamente, las aplicaciones φ_i son continuas, puesto que lo son sus componentes φ_{j,i_j} y dotar a M de la topología producto. Sus inversas están dadas por

$$\varphi_i^{-1}(x_1,\dots,x_k)=\left(\varphi_{1,i_1}^{-1}(x_1),\dots,\varphi_{k,i_k}^{-1}(x_k)\right),$$

que de nuevo son continuas al serlo sus componentes. Además, si $U_i\cap U_j\neq\emptyset$ se tiene que

$$\varphi_j\left(\varphi_i^{-1}(x_1,\dots,x_k)\right)=\left(\varphi_{1,j_1}\left(\varphi_{1,i_1}^{-1}(x_1)\right),\dots,\varphi_{k,j_k}\left(\varphi_{k,i_k}^{-1}(x_k)\right)\right),$$

es claramente diferenciable.

Por último, $\partial\left(M_1\times\cdots\times M_k\right)=M_1\times\cdots\times\partial M_k$. De hecho, sean $(x_1,\dots,x_k)\in\partial\left(M_1\times\cdots\times M_k\right)$ y $(U_{1,i_1}\times\cdots\times U_{k,i_k},\varphi_i=(\varphi_{1,i_1},\dots,\varphi_{k,i_k}))$ una carta local de $M_1\times\cdots\times M_k$, con $(x_1,\dots,x_k)\in U_{1,i_1}\times\cdots\times U_{k,i_k}$. Entonces,

$$\varphi_i\left(x_1,\dots,x_k\right)\in\partial\mathbb{K}^{\sum_{i=1}^{k}\dim M_i}\quad\Leftrightarrow\quad\varphi_k\left(x_k\right)\in\partial\mathbb{K}^{\dim M_k}$$

De manera similar se prueba que $(M_1\times\overset{\circ}{\cdots}\times M_k)=M_1\times\cdots\times\overset{\circ}{M}_k$.

Solución del ejercicio A.2

I) Notemos que la forma a integrar $\omega=(xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+2yz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+2xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$ está dada por $\omega=\mathrm{d}\alpha$, con

$$\alpha=\frac{x^2}{4}\mathrm{d}(y^2)+2xyz\mathrm{d}z\,,$$

Por otra parte, la frontera y el interior de M están dados por

$$\partial M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=a^2\,,z=0\right\}$$

y

$$\overset{\circ}{M}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2=a^2\,,z>0\right\}\,,$$

respectivamente. Para comprobar este hecho, observemos que una de las variables queda determinada por las otras dos. Así, basta tomar el difeomorfismo $F:M\to\overline{B}_a^2\,(0,0)$, donde, $\overline{B}_a^2\,(0,0)$ es la bola cerrada de centro $(0,0)$ y de radio a en $\mathbb{R}^2$, dado por

$$F\left(x,y,z\right)=\left(x,y\right),\ \forall\left(x,y,z\right)\in M.$$

Así, las identidades se tienen, puesto que un difeomorfismo entre variedades preserva el borde y el interior. Ahora bien,

$$\int_M \omega = \int_M \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial M} i^*_{\partial M}\alpha$$

Observemos que

$$i^*_{\partial M}\alpha = \frac{x^2}{4}\mathrm{d}(y^2) = \frac{x^2}{2}y\mathrm{d}y$$

Vamos ahora a tomar dos aplicaciones $\varphi_1\colon y \mapsto \big(|a^2-y^2|, y\big)$ y $\varphi_2\colon y \mapsto \big(-|a^2-y^2|, y\big)$, en ambos casos $y \in [-a,a]$. Entonces,

$$\int_{\partial M} \left(\varphi_1^{-1}\right)^* (i^*_{\partial M}\alpha) = \int_{-a}^{a} y(a^2-y^2)\mathrm{d}y = 0\,,$$

donde en el último paso hemos utilizado que el integrando es una función impar en un dominio de integración simétrico. Lo mismo ocurre para φ_2 y, de esta manera,

$$\int_M \omega = \int_M \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial M} i^*_{\partial M}\alpha = 0$$

II) Consideremos el dominio de integración $D = (0,\pi)\times(0,2\pi) \in \mathbb{R}^2$ y la parametrización

$$\begin{aligned} &F\colon \overline{D} \to \mathbb{S}^2\\ &(\varphi,\theta) \mapsto (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)\,. \end{aligned}$$

La inversa de esta parametrización es una carta positivamente orientada con respecto a la orientación de $\mathbb{S}^2$ inducida por la orientación estándar en $B^3_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Una forma de ver esto es identificar F con la restricción a $\rho = 1$ de la parametrización en coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\tilde{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3(\rho,\varphi,\theta) \qquad\qquad \mapsto (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,.$$

Puesto que $\det(J\tilde{F}) = \rho^2\sin\varphi$ es positivo en $\{1\}\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$, en efecto, F está positivamente orientada. Tenemos que

$$\begin{aligned} F^*\mathrm{d}x &= \mathrm{d}(F^*x) = \mathrm{d}(\sin\varphi\cos\theta) = \cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi - \sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\,,\\ F^*\mathrm{d}y &= \mathrm{d}(F^*y) = \mathrm{d}(\sin\varphi\sin\theta) = \cos\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta\,,\\ F^*\mathrm{d}z &= \mathrm{d}(F^*z) = \mathrm{d}(\cos\varphi) = -\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\,, \end{aligned}$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
&F^*(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)\\
&\qquad = \sin\varphi\cos\theta(\cos\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta) \wedge (-\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)\\
&\qquad\quad + \sin\varphi\sin\theta(-\sin\varphi\mathrm{d}\varphi) \wedge (\cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi - \sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta)\\
&\qquad\quad + \cos\varphi(\cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi - \sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta) \wedge (\cos\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta)\\
&\qquad = (-\sin^3\varphi\cos^2\theta - \sin^3\varphi\sin^2\theta\\
&\qquad\quad - \cos^2\varphi\sin\varphi\cos^2\theta - \cos^2\varphi\sin\varphi\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi\\
&\qquad = (-\sin^3\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi\\
&\qquad = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi\\
&\qquad = \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\theta\,.
\end{aligned}
$$

La integral a calcular queda

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} (x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= \int_D \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\
&= 4\pi\,.
\end{aligned}
$$

III) Por el teorema de Stokes, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial M} \big[(y-z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big]\\
&\qquad = \int_M \mathrm{d}\big[(y-z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big]\\
&\qquad = \int_M 0 = 0\,.
\end{aligned}
$$

IV) La 3-forma

$$
\omega = \cosh(x_3)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_4 e^{x_4^2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4
$$

a integrar es exacta. En efecto, $\omega = \mathrm{d}\alpha$, con

$$
\alpha = \sinh(x_3)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \frac{e^{x_4^2}}{2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\,.
$$

Podemos ver que M es una variedad sin frontera, esto es, $\partial M = \emptyset$. Por ello,

$$
\int_M \omega = \int_{\partial M} \alpha = \int_{\emptyset} \alpha = 0\,.
$$

Solución del ejercicio A.4

Al ser ω^n una forma de volumen, la variedad M es orientable. Supongamos que $\omega = \mathrm{d}\theta$ para alguna 1-forma $\theta \in \Omega^1(M)$. Entonces,

$$\omega^n = \mathrm{d}\theta \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\big(\theta \wedge (\mathrm{d}\theta)^{n-1}\big) = \mathrm{d}(\theta \wedge \omega^{n-1}) \,,$$

por lo que la forma de volumen ω^n también sería exacta. Si además M fuese una variedad compacta, podríamos aplicar el teorema de Stokes, obteniendo

$$\int_M \omega^n = \int_M \mathrm{d}(\theta \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M} \theta \wedge \omega^{n-1} = \int_{\emptyset} \theta \wedge \omega^{n-1} = 0 \,.$$

Por otra parte, para cualquier carta $(U; x^1, \ldots, x^{2n})$ de M, una forma de volumen se puede escribir como $\omega^n = f(x^1, \ldots, x^{2n})\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{2n}$, con $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ una función que no se anula. Por consiguiente,

$$\int_M \omega^n = \int_M f(x^1, \ldots, x^{2n})\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{2n} \neq 0 \,,$$

lo que nos lleva a una contradicción y, así, concluimos que ω no puede ser exacta si M es compacta.

Solución del ejercicio A.5

Notemos que para cada campo de vectores $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{S}^2\right)$, se puede definir una 1-forma $\flat\left(X\right) \in \Omega^1\left(\mathbb{S}^2\right)$ definida por la siguiente igualdad:

$$\{\flat\left(X\right)\}\left(v_x\right) = < X\left(x\right), v_x > = X^i\left(x\right) \cdot v_x^i \,,$$

donde $X = X^i \frac{\partial}{\partial r^i}$ y $v_x = v_x^i \frac{\partial}{\partial r^i}\big|_x$. Así, la aplicación $\flat\colon \mathfrak{X}\left(\mathbb{S}^2\right) \to \Omega^1\left(\mathbb{S}^2\right)$ está bien definida. Observemos que $\flat$ es trivialmente una aplicación lineal. Notemos, además, que si $\flat\left(X\right) = 0$, entonces evaluando en las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial r^i}\big|_x$, se tiene que $X = 0$, i.e., $\flat$ es inyectiva. Finalmente, evaluando punto a punto, obtenemos una aplicación lineal $\flat_x\colon \mathsf{T}_x\mathbb{S}^2 \to \mathsf{T}_x^*\mathbb{S}^2$ que es inyectiva. Luego, por dimensión, $\flat_x$ debe ser un isomorfismo lineal y, por lo tanto, $\flat$ también lo es. Definimos el gradiente de f como el único campo de vectores ∇f sobre $\mathbb{S}^2$ que satisface que

$$\flat\left(\nabla f\right) = \mathrm{d}f \,.$$

Entonces, existe un punto $x \in \mathbb{S}^2$ donde ∇f se anula. Por lo tanto,

$$0 = \flat_x\left(\nabla f\left(x\right)\right)\{\flat\left(\nabla f\right)\}\left(x\right) = \mathrm{d}f|_x \,,$$

i.e., para cualquier carta local $\left(x^1, x^2\right)$ de $\mathbb{S}^2$ alrededor de x, se tiene que

$$\mathrm{d}f|_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x = 0 \,.$$

Solución del ejercicio A.6

I) Por el teorema de Green:

$$\int_{\partial\overline{D}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Calculamos primero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial y^2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial y} = 0$$

Por lo tanto,

$$\int_{\partial\overline{D}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\overline{D}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ = \ 0$$

II) Con objeto de utilizar el teorema de Green, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\,(-y)}{\partial y} = -1$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{S}^1_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\overline{B}^2_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\overline{B}^2_2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\cdot 4\pi = 8\pi$$

III) Claramente, la frontera $\partial\overline{R}$ consta de los tres lados del triángulo. Llamemos $\partial\overline{R}_1$ al segmento que va desde el punto $(0,0)$ al $(0,1)$, $\partial\overline{R}_2$ al segmento que va desde el punto $(0,1)$ al $(1,0)$, y $\partial\overline{R}_3$ al que va desde el punto $(1,0)$ al $(0,0)$. Una parametrización natural es

$$x(t) = t\,, \quad y(t) = 0\,, \quad t \in [0,1]\,,$$

en $\partial\overline{R}_1$,

$$x(t) = 1-t\,, \quad y(t) = t\,, \quad t \in [0,1]\,,$$

en $\partial\overline{R}_2$, y

$$x(t) = 0\,, \quad y(t) = 1-t\,, \quad t \in [0,1]\,,$$

en $\partial\overline{R}_3$. De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\overline{R}_1} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) &= \int_0^1 \left(P\big(x(t),y(t)\big)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + Q\big(x(t),y(t)\big)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t-1)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,,\end{aligned}$$

$$\int_{\partial \overline{R}_2} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_0^1 2t\mathrm{d}t = 1\,,$$

y

$$\int_{\partial \overline{R}_3} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_0^1 (t-1)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,,$$

de modo que

$$\int_{\partial \overline{R}} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_{\partial \overline{R}_1} + \int_{\partial \overline{R}_2} + \int_{\partial \overline{R}_3} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0\,.$$

IV) El área de una región R en el plano se puede expresar como:

$$\text{Área}(R) = \int_R 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Podemos usar el teorema de Green para convertir esta integral doble en una integral de línea. Si elegimos un campo de vectores $F\,(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$, entonces:

$$\text{Área}(R) = \int_R 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

donde $P(x,y) = -\frac{y}{2}$ y $Q(x,y) = \frac{x}{2}$.

Calculamos ahora las derivadas parciales,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Entonces:

$$\text{Área}(R) = \int_R \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_R 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

De acuerdo con el teorema de Green, esta integral de área puede escribirse como una integral de línea:

$$\text{Área}(R) = \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_C \left(-\frac{y}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{2}\,\mathrm{d}y\right)$$

La curva C es la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Una parametrización conveniente de C es:

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 3\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Notemos que $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}y$ vienen dados por

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}(2\cos t)\,\mathrm{d}t = -2\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial t}(3\sin t)\,\mathrm{d}t = 3\cos t\,\mathrm{d}t$$

Sustituyendo en la integral de línea:

$$\begin{aligned}\text{Área}(R) &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3\sin t}{2} \cdot (-2\sin t) + \frac{2\cos t}{2} \cdot 3\cos t \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(3\sin^2 t + 3\cos^2 t\right) \mathrm{d}t \\ &= 3\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = 3\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 3 \cdot 2\pi = 6\pi\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la región R delimitada por la elipse es 6π.

Solución del ejercicio A.7

a) La divergencia de X está dada por

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3\,.$$

Aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial \overline{B}^3_R(0,0,0)} X &= \int_{\overline{B}^3_R(0,0,0)} \operatorname{div}(X)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ &= 3 \cdot Vol\left(\overline{B}^3_R(0,0,0)\right) \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3\,.\end{aligned}$$

b) Consideremos coordenadas esféricas:

$$\varphi(\theta,\phi) = (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)\ .$$

donde R es el radio de la esfera. Denotando $\left(x^1, x^2\right) = \varphi^{-1}$, los vectores tangentes a la superficie dados por las derivadas parciales son

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = R\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + R\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - R\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x^2} = -R\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + R\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

El vector normal a la superficie $\overline{N}$ que se obtiene del producto vectorial de las derivadas parciales viene dado por

$$\begin{aligned}\overline{N} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \times \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= R^2\sin\theta\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}\right)\,,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\overline{N} = R^2 \sin\theta \cdot N \,,$$

donde N es el vector normal exterior y unitario. Notemos, por otro lado, que la normal unitaria exterior en $\mathbb{S}^2_R$ viene dada por $N(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{||(x,y,z)||}$. Entonces,

$$\langle X, N \rangle = \frac{1}{||\,(x, y, z)\,||^2}$$

Entonces, por el definición 2.10.159 y la ecuación (2.45),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2_R} X &= \int_{\mathbb{S}^2_R} i_S^* \left(\iota_X \Omega\right) \\
&= \int_{\mathbb{S}^2_R} \left\langle X, \overline{N} \right\rangle \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&= \int_{\mathbb{S}^2_R} \frac{1}{R^2}\, R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \\
&= 2\pi \times 2 = 4\pi \,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que la divergencia de X es

$$\mathrm{div}\,(X) = 0\,, \ \text{c.t.p.}\,.$$

Entonces,

$$\int_{\overline{B}^3_R(0,0,0)} \mathrm{div}\,(X)\,\mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z = 0\,.$$

¿Cómo puede ser que ambas expresiones no resulten ser iguales? ¿Qué ha fallado?

Solución del ejercicio A.9

Sea $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}$ un campo de vectores definido en $\mathbb{R}^3$. Recordemos que la integral de línea de X a lo largo de $\partial\mathbb{S}^{2+}_2$ viene dada por

$$\int_{\partial S} i^*_{\partial S}\left(\flat\,(X)\right) \ = \ \int_{\partial S} \langle X, T \rangle \ \mathrm{d}s\,.$$

Entonces, por el teorema de Stokes para superficies,

$$\int_{\mathbb{S}_2^{2+}} \nabla \times X \; = \; \int_{\partial \mathbb{S}_2^{2+}} \langle X, T \rangle \; \mathrm{d}s \,.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \nabla \times X &= \left(\frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \,. \end{aligned}$$

Entonces, consideremos el difeomorfismo $\left(x^1, x^2\right) = \varphi : \mathbb{S}_2^{2+} \to \overline{B}_2^2 (0,0)$ tal que $\varphi (x, y, z) = (x, y)$. Así, dado que $\overline{B}_2^2 (0,0)$ es un dominio de integración, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbb{S}_2^{2+}} \langle X, T \rangle \; \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{S}_2^{2+}} \nabla \times X = \int_{\mathbb{S}_2^{2+}} 2 \frac{\partial}{\partial z} & \\ = 2 \int_{\overline{B}_2^2 (0,0)} \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1} \frac{\partial r^2}{\partial x^2} - \frac{\partial r^2}{\partial x^1} \frac{\partial r^1}{\partial x^2} \right] \circ \varphi^{-1} \; \mathrm{d}r^1 \mathrm{d}r^2 & \\ = 2 \int_{\overline{B}_2^2 (0,0)} \mathrm{d}r^1 \mathrm{d}r^2 & \\ = 8\pi \,. & \end{aligned}$$

Notemos que se ha utilizado también la ecuación (2.46), que se puede encontrar al final de la subsección 2.10.6.

Solución del ejercicio A.11

I) Recordemos que el volumen de una variedad viene determinado por la forma de volumen que define su orientación a través de la definición 2.10.150. Luego, en este caso, tomando $\Omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ como la forma de volumen usual de $\mathbb{R}^3$, y N el campo de vectores normal y unitario que define la orientación de S, se tiene que

$$\mathrm{Vol}\,(S) = \int_S i_S^* \left(\iota_N \Omega \right) \,.$$

Además, teniendo en cuenta el definición 2.10.159, se tiene que, en general, el volumen de una superficie se puede expresar en función de una integral de superficie de campos de vectores como sigue:

$$\mathrm{Vol}\,(S) = \int_S N \,.$$

Observemos ahora que $[0,2]\times[0,2\pi]$ es un dominio de integración. Así, tomando

$$\begin{aligned}
\overline{N} &= \left[\frac{\partial r^2}{\partial x^1}\frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1}\frac{\partial r^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad - \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1}\frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1}\frac{\partial r^1}{\partial x^2}\right]\frac{\partial}{\partial y} \\
&\quad + \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1}\frac{\partial r^2}{\partial x^2} - \frac{\partial r^2}{\partial x^1}\frac{\partial r^1}{\partial x^2}\right]\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \left[2\rho^2\cos\theta\right]\frac{\partial}{\partial x} - \left[\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta\right]\frac{\partial}{\partial y} + \left[2\rho^2\sin\theta\right]\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \left[2\rho^2\cos\theta\right]\frac{\partial}{\partial x} - \rho\frac{\partial}{\partial y} + \left[2\rho^2\sin\theta\right]\frac{\partial}{\partial z}\,,
\end{aligned}$$

se comprueba fácilmente que $\overline{N}$ es normal a S. Además, $||\overline{N}|| = \sqrt{4\rho^4+\rho^2} = \rho\sqrt{4\rho^2+1}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(S) &= \int_S i_S^*\left(\iota_N\Omega\right) \\
&= \int_{\varphi^{-1}(S)} \varphi^*\left(i_S^*\left(\iota_N\Omega\right)\right) \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} ||\overline{N}||\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} \rho\sqrt{4\rho^2+1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\int_0^2 \rho\sqrt{4\rho^2+1}\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\pi}{6}\left[\left(4\rho^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \\
&= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right).
\end{aligned}$$

¿Se puede simplificar el cálculo de estas áreas utilizando el teorema de divergencia?

Bibliografía

[1] R. Abraham and J. E. Marsden. Foundations of Mechanics. AMS Chelsea publishing. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, Providence, 2008.

[2] I. Agricola and T. Friedrich. Global Analysis, volume 52 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI.

[3] G. Brousseau. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 4(2):165–198, 1983.

[4] G. Cantor. Ein beitrag zur mannigfaltigkeitslehre. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84:242–258, 1877.

[5] M. P. D. Carmo. Differential Forms and Applications. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 1998.

[6] M. Civil, N. Planas, and J. D. Fonseca. La atención a la diversidad en el aula de matemáticas: hacia una participación pedagógica y matemática. UNO, 23:29-42, 2000.

[7] A. F. Costa González, J. M. Gamboa Mutuberria, and A. M. Porto Ferreira Da Silva. Geometría Diferencial De Curvas Y Superficies. Sanz y Torres, S.L.

[8] J. De Burgos Román. Cálculo infinitesimal de varias variables. McGraw-Hill, 2ª ed. edition.

[9] S. de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Universidad nacional de educación a distancia. nuevos horizontes a la universidad. In Cuadernos de Información, volume 1 of Enseñanza a distancia. Servicio de Publicaciones, 1972.

[10] F. J. Díaz and J. M. García Calcines. Curso de Topología General. Editorial Vision Net.

[11] J. Giménez. Evaluación en Matemáticas: Una Integración de Perspectivas. Síntesis, 1997.

[12] A. H. Herzig. Goals for achieving diversity in mathematics classrooms connecting research to teaching. 99(4):253-259, 2005.

[13] V. M. Jiménez and A. López-Gordón. Integración en variedades (segunda edición). Sanz y Torres, S.L., Madrid, 2024.

[14] M. A. Kervaire. A manifold which does not admit any differentiable structure. Commentarii Mathematici Helvetici, 34(1):250 – 270, 1960.

[15] C. Lee and D. Pimm. Assessing Mathematics Learning. Learning to Teach Mathematics in the Secondary School: a companion to school experience. Johnston-Wilder, S., Now York, Routledge, 2017.

[16] J. M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds, volume 218 of Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[17] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, volume 202 of Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[18] J. E. Marsden and A. J. Tromba. Cálculo vectorial. Pearson Addison Wesley.

[19] Morera. Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología (tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, 2013.

[20] J. R. Munkres. Topology. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, second edition.

[21] G. Peano. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. Mathematische Annalen, 36:157–160, 1890.

[22] T. Shifrin. Multivariable Mathematics: Linear Algebra, Multivariable, Calculus, and Manifolds. Wiley.

[23] E. A. Silver. On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, 14(1):19-28, 1994.

[24] M. S. Smith and M. K. Stein. Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. NCTM, 3(5):344–350, 1998.

[25] M. Spivak. Calculus On Manifolds: A Modern Approach To Classical Theorems Of Advanced Calculus. Avalon Publishing, 1965.

[26] L. A. Sánchez, L. Conejo, and J. M. Múñoz. Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Síntesis, 2019.