

Concurso de acceso a Profesor Titular de Universidad

Tema 3: Cálculo integral

Víctor Manuel Jiménez Morales

Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED

Plaza 215.01 – Geometría y Topología

Departamento de Matemáticas Fundamentales

Campos y Formas – integral

chardistribution.eu

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido
 - 3.1 Integración de formas: idea y construcción

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido
 - 3.1 Integración de formas: idea y construcción
 - 3.2 Integrales de línea/superficie como casos particulares

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido
 - 3.1 Integración de formas: idea y construcción
 - 3.2 Integrales de línea/superficie como casos particulares
 - 3.3 Stokes, cerradas/exactas y lema de Poincaré

Estructura

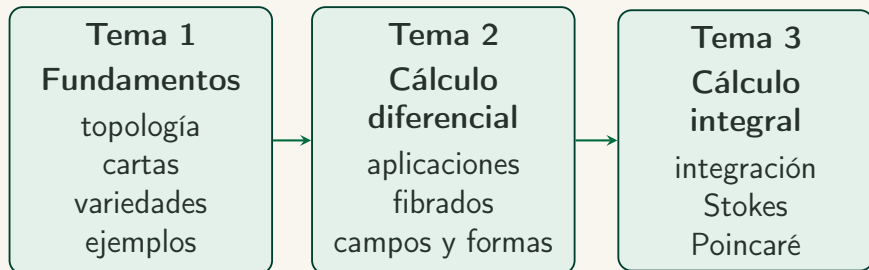
Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido
 - 3.1 Integración de formas: idea y construcción
 - 3.2 Integrales de línea/superficie como casos particulares
 - 3.3 Stokes, cerradas/exactas y lema de Poincaré
- 4 Metodología, evaluación y cierre

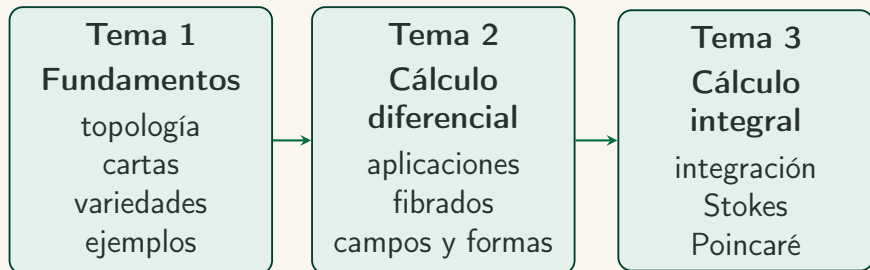
Recurso visual que muestra la estructura global del primer tema



Lugar del tema en Campos y Formas



Lugar del tema en Campos y Formas



El Tema 3 culmina la asignatura: **integrar** en variedades y entender Stokes como principio unificador.

Idea directriz

Stokes como principio unificador

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Una fórmula que recupera Green, divergencia y Stokes clásico.

Razón matemática del cambio

Una construcción general



varios casos particulares

Economía conceptual

Si el lenguaje de variedades está bien construido, el análisis diferencial en curvas, superficies y $\mathbb{R}^n$ no se estudian como excepciones, sino como ejemplos naturales.

Algunas razones docentes

Comprensión

Menos
fragmentación
conceptual.

Algunas razones docentes

Comprensión

Menos fragmentación conceptual.

Conexiones

Mejor enlace con Curvas y superficies y Geometría Diferencial.

Algunas razones docentes

Comprensión

Menos fragmentación conceptual.

Conexiones

Mejor enlace con Curvas y superficies y Geometría Diferencial.

Abstracción

¿Para que sirve generalizar?

Algunas razones docentes

Comprensión

Menos fragmentación conceptual.

Conexiones

Mejor enlace con Curvas y superficies y Geometría Diferencial.

Abstracción

¿Para que sirve generalizar?

La abstracción no se presenta como obstáculo, sino como herramienta de organización.

- ▶ Hitos fundamentales.
- ▶ Objetivos de aprendizaje.
- ▶ Criterios de logro.

Hitos fundamentales del Tema 3

Hitos fundamentales

1 Integral en variedades

Hitos fundamentales del Tema 3

Hitos fundamentales

- 1 Integral en variedades
- 2 Integral de línea e integral de superficie

Hitos fundamentales del Tema 3

Hitos fundamentales

- 1 Integral en variedades
- 2 Integral de línea e integral de superficie
- 3 Teorema de Stokes

Hitos fundamentales del Tema 3

Hitos fundamentales

- 1 Integral en variedades
- 2 Integral de línea e integral de superficie
- 3 Teorema de Stokes
- 4 Formas conservativas

Hitos fundamentales del Tema 3

Hitos fundamentales

- 1 Integral en variedades
- 2 Integral de línea e integral de superficie
- 3 Teorema de Stokes
- 4 Formas conservativas
- 5 Lema de Poincaré

El Tema 3 culmina el recorrido de la asignatura: el lenguaje diferencial del Tema 2 se convierte ahora en cálculo integral sobre variedades.

Objetivos de aprendizaje: orientación e integración

Orientación inducida

5 horas: T-3h, P-2h

- Comprender el papel de la orientación en la integración de formas diferenciales.

Objetivos de aprendizaje: orientación e integración

Orientación inducida

5 horas: T-3h, P-2h

- ▶ Comprender el papel de la orientación en la integración de formas diferenciales.
- ▶ Relacionar orientación, borde y elección de signos.

Objetivos de aprendizaje: orientación e integración

Orientación inducida

5 horas: T-3h, P-2h

- ▶ Comprender el papel de la orientación en la integración de formas diferenciales.
- ▶ Relacionar orientación, borde y elección de signos.
- ▶ Entender la orientación inducida en el borde de una variedad.

Objetivos de aprendizaje: orientación e integración

Orientación inducida

5 horas: T-3h, P-2h

- ▶ Comprender el papel de la orientación en la integración de formas diferenciales.
- ▶ Relacionar orientación, borde y elección de signos.
- ▶ Entender la orientación inducida en el borde de una variedad.
- ▶ Reconocer la dependencia de la integral respecto de la orientación.

Objetivos de aprendizaje: orientación e integración

Orientación inducida

5 horas: T-3h, P-2h

- ▶ Comprender el papel de la orientación en la integración de formas diferenciales.
- ▶ Relacionar orientación, borde y elección de signos.
- ▶ Entender la orientación inducida en el borde de una variedad.
- ▶ Reconocer la dependencia de la integral respecto de la orientación.
- ▶ Preparar el marco conceptual necesario para el teorema de Stokes.

Objetivos de aprendizaje: integral en variedades

3.1 Integral en variedades

15 horas: T-10h, P-5h

- Definir la integral de una k -forma diferencial sobre una variedad sobre una carta global.

Objetivos de aprendizaje: integral en variedades

3.1 Integral en variedades

15 horas: T-10h, P-5h

- ▶ Definir la integral de una k -forma diferencial sobre una variedad sobre una carta global.
- ▶ Usar cartas locales y particiones de la unidad para construir integrales globales.

Objetivos de aprendizaje: integral en variedades

3.1 Integral en variedades

15 horas: T-10h, P-5h

- ▶ Definir la integral de una k -forma diferencial sobre una variedad sobre una carta global.
- ▶ Usar cartas locales y particiones de la unidad para construir integrales globales.
- ▶ Relacionar la integral en variedades con el cambio de variable clásico.

Objetivos de aprendizaje: integrales de línea y superficie

3.2 Integral de línea

5 horas: T-3h, P-2h

- ▶ Curvas parametrizadas.
- ▶ Integral de línea.
- ▶ Relación con el pullback.
- ▶ Caminos simples y relación con la integral de variedades.

3.3 Integral de superficie

5 horas: T-3h, P-2h

- ▶ Superficies parametrizadas.
- ▶ Formas de grado 2.
- ▶ Orientación normal.
- ▶ Integral en superficies de formas y campos de vectores.

Curvas y superficies aparecen aquí como ejemplos naturales del lenguaje general de variedades.

Objetivos de aprendizaje: teorema de Stokes

3.4 Teorema de Stokes

15 horas: T-10h, P-5h

- Enunciar el teorema de Stokes en variedades con borde.

Objetivos de aprendizaje: teorema de Stokes

3.4 Teorema de Stokes

15 horas: T-10h, P-5h

- ▶ Enunciar el teorema de Stokes en variedades con borde.
- ▶ Comprender la relación entre integral en el interior e integral en el borde.

Objetivos de aprendizaje: teorema de Stokes

3.4 Teorema de Stokes

15 horas: T-10h, P-5h

- ▶ Enunciar el teorema de Stokes en variedades con borde.
- ▶ Comprender la relación entre integral en el interior e integral en el borde.
- ▶ Interpretar el teorema como una generalización del cálculo clásico.

Objetivos de aprendizaje: teorema de Stokes

3.4 Teorema de Stokes

15 horas: T-10h, P-5h

- ▶ Enunciar el teorema de Stokes en variedades con borde.
- ▶ Comprender la relación entre integral en el interior e integral en el borde.
- ▶ Interpretar el teorema como una generalización del cálculo clásico.
- ▶ Reconocer como casos particulares el teorema fundamental del cálculo, Green, Gauss y Stokes clásico.

Objetivos de aprendizaje: teorema de Stokes

3.4 Teorema de Stokes

15 horas: T-10h, P-5h

- ▶ Enunciar el teorema de Stokes en variedades con borde.
- ▶ Comprender la relación entre integral en el interior e integral en el borde.
- ▶ Interpretar el teorema como una generalización del cálculo clásico.
- ▶ Reconocer como casos particulares el teorema fundamental del cálculo, Green, Gauss y Stokes clásico.
- ▶ Aplicar el resultado al cálculo de integrales y volúmenes.

Objetivos de aprendizaje: formas conservativas

3.5 Formas conservativas

4 horas: T-2h, P-2h

- Definir formas conservativas en el lenguaje de formas diferenciales.

Objetivos de aprendizaje: formas conservativas

3.5 Formas conservativas

4 horas: T-2h, P-2h

- ▶ Definir formas conservativas en el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ Relacionar formas conservativas, exactitud y existencia de potencial.

Objetivos de aprendizaje: formas conservativas

3.5 Formas conservativas

4 horas: T-2h, P-2h

- ▶ Definir formas conservativas en el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ Relacionar formas conservativas, exactitud y existencia de potencial.
- ▶ Comprender la independencia del camino en integrales de línea.

Objetivos de aprendizaje: formas conservativas

3.5 Formas conservativas

4 horas: T-2h, P-2h

- ▶ Definir formas conservativas en el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ Relacionar formas conservativas, exactitud y existencia de potencial.
- ▶ Comprender la independencia del camino en integrales de línea.
- ▶ Comparar el concepto con el caso clásico de campos conservativos en $\mathbb{R}^n$.

Objetivos de aprendizaje: lema de Poincaré

3.6 Lema de Poincaré

8 horas: T-5h, P-3h

- Distinguir formas cerradas y formas exactas.

Objetivos de aprendizaje: lema de Poincaré

3.6 Lema de Poincaré

8 horas: T-5h, P-3h

- ▶ Distinguir formas cerradas y formas exactas.
- ▶ Comprender el significado de la exactitud local.

Objetivos de aprendizaje: lema de Poincaré

3.6 Lema de Poincaré

8 horas: T-5h, P-3h

- ▶ Distinguir formas cerradas y formas exactas.
- ▶ Comprender el significado de la exactitud local.
- ▶ Enunciar y aplicar el lema de Poincaré.

Objetivos de aprendizaje: lema de Poincaré

3.6 Lema de Poincaré

8 horas: T-5h, P-3h

- ▶ Distinguir formas cerradas y formas exactas.
- ▶ Comprender el significado de la exactitud local.
- ▶ Enunciar y aplicar el lema de Poincaré.
- ▶ Relacionar el resultado con dominios contráctiles y homotopía.

Objetivos de aprendizaje: lema de Poincaré

3.6 Lema de Poincaré

8 horas: T-5h, P-3h

- ▶ Distinguir formas cerradas y formas exactas.
- ▶ Comprender el significado de la exactitud local.
- ▶ Enunciar y aplicar el lema de Poincaré.
- ▶ Relacionar el resultado con dominios contráctiles y homotopía.
- ▶ Entender como la topología condiciona la existencia de primitivas.

Criterios de logro del Tema 3

Integral en variedades

- ▶ **Definir** correctamente la integral de una forma diferencial sobre una variedad con carta global.

Criterios de logro del Tema 3

Integral en variedades

- ▶ **Definir** correctamente la integral de una forma diferencial sobre una variedad con carta global.
- ▶ **Calcular** integrales usando cartas locales y parametrizaciones.

Criterios de logro del Tema 3

Integral en variedades

- ▶ **Definir** correctamente la integral de una forma diferencial sobre una variedad con carta global.
- ▶ **Calcular** integrales usando cartas locales y parametrizaciones.
- ▶ **Explicar** el papel de la orientación en el signo de la integral.

Criterios de logro del Tema 3

Integral en variedades

- ▶ **Definir** correctamente la integral de una forma diferencial sobre una variedad con carta global.
- ▶ **Calcular** integrales usando cartas locales y parametrizaciones.
- ▶ **Explicar** el papel de la orientación en el signo de la integral.
- ▶ **Relacionar** la integral en variedades con la integral clásica en abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Criterios de logro del Tema 3

Integral en variedades

- ▶ **Definir** correctamente la integral de una forma diferencial sobre una variedad con carta global.
- ▶ **Calcular** integrales usando cartas locales y parametrizaciones.
- ▶ **Explicar** el papel de la orientación en el signo de la integral.
- ▶ **Relacionar** la integral en variedades con la integral clásica en abiertos de $\mathbb{R}^n$.
- ▶ **Interpretar** volúmenes como integrales de formas de volumen.

Criterios de logro del Tema 3

Integrales de línea y superficie

- **Calcular** integrales de línea mediante parametrizaciones.

Criterios de logro del Tema 3

Integrales de línea y superficie

- ▶ **Calcular** integrales de línea mediante parametrizaciones.
- ▶ **Reconocer** el efecto de un cambio de orientación en una curva.

Criterios de logro del Tema 3

Integrales de línea y superficie

- ▶ **Calcular** integrales de línea mediante parametrizaciones.
- ▶ **Reconocer** el efecto de un cambio de orientación en una curva.
- ▶ **Calcular** integrales de superficie en ejemplos concretos.

Criterios de logro del Tema 3

Integrales de línea y superficie

- ▶ **Calcular** integrales de línea mediante parametrizaciones.
- ▶ **Reconocer** el efecto de un cambio de orientación en una curva.
- ▶ **Calcular** integrales de superficie en ejemplos concretos.
- ▶ **Relacionar** integrales de superficie de formas y campos de vectores.

Criterios de logro del Tema 3

Integrales de línea y superficie

- ▶ **Calcular** integrales de línea mediante parametrizaciones.
- ▶ **Reconocer** el efecto de un cambio de orientación en una curva.
- ▶ **Calcular** integrales de superficie en ejemplos concretos.
- ▶ **Relacionar** integrales de superficie de formas y campos de vectores.
- ▶ **Comparar** estos casos particulares con la definición general de integral en variedades.

Criterios de logro del Tema 3

Teorema de Stokes

- **Enunciar** el teorema de Stokes en el lenguaje de formas diferenciales.

Criterios de logro del Tema 3

Teorema de Stokes

- ▶ **Enunciar** el teorema de Stokes en el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ **Identificar** correctamente la variedad, su borde y la orientación inducida.

Criterios de logro del Tema 3

Teorema de Stokes

- ▶ **Enunciar** el teorema de Stokes en el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ **Identificar** correctamente la variedad, su borde y la orientación inducida.
- ▶ **Aplicar** Stokes para transformar integrales en el interior en integrales sobre el borde, y recíprocamente.

Criterios de logro del Tema 3

Teorema de Stokes

- ▶ **Enunciar** el teorema de Stokes en el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ **Identificar** correctamente la variedad, su borde y la orientación inducida.
- ▶ **Aplicar** Stokes para transformar integrales en el interior en integrales sobre el borde, y recíprocamente.
- ▶ **Reconocer** los teoremas clásicos del cálculo vectorial como casos particulares.

Criterios de logro del Tema 3

Teorema de Stokes

- ▶ **Enunciar** el teorema de Stokes en el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ **Identificar** correctamente la variedad, su borde y la orientación inducida.
- ▶ **Aplicar** Stokes para transformar integrales en el interior en integrales sobre el borde, y recíprocamente.
- ▶ **Reconocer** los teoremas clásicos del cálculo vectorial como casos particulares.
- ▶ **Justificar** cada paso del cálculo, especialmente los relativos a orientación y dimensión.

Criterios de logro del Tema 3

Formas conservativas

- ▶ **Distinguir** formas conservativas y exactas.
- ▶ **Encontrar** potenciales cuando existan.
- ▶ **Usar** la independencia del camino.

Lema de Poincaré

- ▶ **Distinguir** cerrada y exacta.
- ▶ **Aplicar** exactitud local.
- ▶ **Relacionar** homotopía y primitivas.
- ▶ **Comprender** el papel del dominio.

Criterios de logro del Tema 3

Síntesis conceptual

- **Conectar** el cálculo diferencial del Tema 2 con la integración del Tema 3.

Criterios de logro del Tema 3

Síntesis conceptual

- ▶ **Conectar** el cálculo diferencial del Tema 2 con la integración del Tema 3.
- ▶ **Comprender** que Stokes unifica varios resultados clásicos en un único enunciado.

Criterios de logro del Tema 3

Síntesis conceptual

- ▶ **Conectar** el cálculo diferencial del Tema 2 con la integración del Tema 3.
- ▶ **Comprender** que Stokes unifica varios resultados clásicos en un único enunciado.
- ▶ **Interpretar** las formas diferenciales como el lenguaje natural de la integración en variedades.

Criterios de logro del Tema 3

Síntesis conceptual

- ▶ **Conectar** el cálculo diferencial del Tema 2 con la integración del Tema 3.
- ▶ **Comprender** que Stokes unifica varios resultados clásicos en un único enunciado.
- ▶ **Interpretar** las formas diferenciales como el lenguaje natural de la integración en variedades.
- ▶ **Resolver** ejercicios que combinen cálculo local, orientación y razonamiento global.

Criterios de logro del Tema 3

Síntesis conceptual

- ▶ **Conectar** el cálculo diferencial del Tema 2 con la integración del Tema 3.
- ▶ **Comprender** que Stokes unifica varios resultados clásicos en un único enunciado.
- ▶ **Interpretar** las formas diferenciales como el lenguaje natural de la integración en variedades.
- ▶ **Resolver** ejercicios que combinen cálculo local, orientación y razonamiento global.
- ▶ **Valorar** el papel de la topología en la existencia de potenciales y primitivas.

El Tema 3 muestra la potencia de la abstracción inicial: un único teorema organiza gran parte del cálculo integral clásico.

¿Qué se integra?

Principio

En una variedad orientada de dimensión n se integran naturalmente n -formas.

$$\omega \in \Omega^n(M) \quad \Rightarrow \quad \int_M \omega$$

La definición se construye por cartas y se prueba independencia de la elección local.

Integración local y cambio de carta

En una carta $(U, \varphi = (x^i))$

Si $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ en coordenadas, entonces

$$\int_U \omega \pm \int_{\hat{U}} \varphi^{-1*} \omega = \pm \int_{\hat{U}} (f \circ \varphi^{-1}) dr^1 \dots dr^n,$$

se reduce a una integral en $\mathbb{R}^n$.

Particiones de la unidad

Teorema (existencia de particiones de la unidad)

Sea M una variedad diferenciable compacta, y sea $\mathcal{F} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de cartas locales que recubre la variedad M . Entonces, existe una familia finita de funciones diferenciables $\{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que

- ❶ $\sum_{i=1}^m f_i = 1$,
- ❷ $0 \leq f_i \leq 1$ para todo $i = 1, \dots, m$,
- ❸ El soporte de cada f_i está contenido en algún entorno coordinado U_α .

A la familia $\{f_i\}_{i=1}^m$ se le denomina **partición de la unidad diferenciable subordinada a la familia $\mathcal{F}$** .

Integral

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n compacta y orientable, con orientación Ω . Consideremos un recubrimiento abierto por cartas locales $\mathcal{F} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M , y una partición de la unidad diferenciable $\{f_i\}_{i=1}^m$ subordinada a la familia $\mathcal{F}$. Entonces, definimos la **integral de una n -forma** ω sobre M como

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_M f_i \omega. \quad (1)$$

Un ejemplo de pregunta: orientación

Es este un momento adecuado para tomarse un respiro en la lectura del texto, y pararse a meditar sobre la definición de la integral. Desde el inicio del capítulo se ha exigido que la variedad fuera orientable, con orientación Ω . Sin embargo, ni en la forma local dada en la ecuación (4.2) ni en la definición 4.1.7 parece hacerse mención explícita al uso de Ω : ¿es realmente necesario que M sea orientable? ¿De qué sirve fijar Ω ?

Un ejemplo de pregunta: orientación

Es este un momento adecuado para tomarse un respiro en la lectura del texto, y pararse a meditar sobre la definición de la integral. Desde el inicio del capítulo se ha exigido que la variedad fuera orientable, con orientación Ω . Sin embargo, ni en la forma local dada en la ecuación (4.2) ni en la definición 4.1.7 parece hacerse mención explícita al uso de Ω : ¿es realmente necesario que M sea orientable? ¿De qué sirve fijar Ω ?

Profundizar en una definición clave.

Resultados para el cálculo

Teorema (Cambio de variable)

Sea $\psi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre dos variedades orientables M y N , con orientaciones Ω_M y Ω_N , respectivamente. Entonces, para toda forma de grado máximo ω en N ,

$$\int_N \omega = \pm \int_M \psi^* \omega,$$

donde el signo es el dado por la orientación de $\psi^* \Omega_N$; siendo $+$ si es positiva, y $-$ si es negativa.

Resultados para el cálculo

Corolario

Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos dominios regulares precompactos en $\mathbb{R}^n$, y $\psi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ un difeomorfismo. Entonces, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}_2)$,

$$\int_{\mathcal{D}_2} f \, dr^1 \cdots dr^n = \int_{\mathcal{D}_1} (f \circ \psi) |\det(J\psi)| \, dr^1 \cdots dr^n.$$

Resultados para el cálculo

Teorema (Integración por parametrizaciones)

Sea M una variedad de dimensión n compacta y orientable, con orientación Ω , y sea $\omega \in \Omega^n(M)$. Supongamos que $D_1, \dots, D_k \subseteq \mathbb{R}^n$ son dominios de integración abiertos tales que, para cada $i = 1, \dots, k$, existe una aplicación diferenciable $f_i : \overline{D}_i \rightarrow M$, definida sobre la clausura de D_i , que cumple que:

- 1 La restricción de f_i a D_i es una parametrización de M cuya inversa tiene orientación positiva.
- 2 Si $i \neq j$, $f_i(D_i) \cap f_j(D_j) = \emptyset$.
- 3 $\bigcup_{i=1}^k f_i(\overline{D}_i) = M$.

Entonces, $\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\overline{D}_i} f_i^* \omega$.

Integral de línea

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ y $\eta \in \Omega^1(M)$,

$$\int_{\gamma} \eta = \int_{[a,b]} \gamma^* \eta = \int_a^b \{ \eta(\gamma(t)) \} (\gamma'(t)) dt$$

Integral de línea

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ y $\eta \in \Omega^1(M)$,

$$\int_{\gamma} \eta = \int_{[a,b]} \gamma^* \eta = \int_a^b \{ \eta(\gamma(t)) \} (\gamma'(t)) dt$$

Camino simple $\mapsto$ Integral en variedades.

Integral de superficie

Normal

Sea S una superficie. Un campo de vectores N en $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S se dice **normal** a S si, para todo $x \in S$ y todo $v_x \in T_x S$, se tiene que

$$\langle N(x), T_x i_S(v_x) \rangle = 0, \quad (2)$$

donde $i_S : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación inclusión, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

Integral de superficie

Normal

Sea S una superficie. Un campo de vectores N en $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S se dice **normal** a S si, para todo $x \in S$ y todo $v_x \in T_x S$, se tiene que

$$\langle N(x), T_x i_S(v_x) \rangle = 0, \quad (2)$$

donde $i_S : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación inclusión, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

Sea $\Omega = dr^1 \wedge dr^2 \wedge dr^3$ la forma de volumen canónica,

$$||N|| = 1, \quad i_S^*(\iota_N \Omega) \mapsto \text{forma de volumen sobre } S. \quad (3)$$

Integral de superficie

Para cada campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S ,

$$\int_S X = \int_S \langle X, N \rangle i_S^* (\iota_N \Omega) = \int_S i_S^* (\iota_X \Omega) .$$

Integral de superficie

Para cada campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^3$ a lo largo de S ,

$$\int_S X = \int_S \langle X, N \rangle i_S^* (\iota_N \Omega) = \int_S i_S^* (\iota_X \Omega) .$$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{U}} X &= \int_{\hat{U}} \langle X, \bar{N} \rangle \circ \varphi_U^{-1} dr^1 dr^2 \\ &= \int_{\hat{U}} \left(X^1 \left[\frac{\partial r^2}{\partial x^1} \frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1} \frac{\partial r^2}{\partial x^2} \right] - X^2 \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1} \frac{\partial r^3}{\partial x^2} - \frac{\partial r^3}{\partial x^1} \frac{\partial r^1}{\partial x^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + X^3 \left[\frac{\partial r^1}{\partial x^1} \frac{\partial r^2}{\partial x^2} - \frac{\partial r^2}{\partial x^1} \frac{\partial r^1}{\partial x^2} \right] \right) \circ \varphi_U^{-1} dr^1 dr^2 . \end{aligned}$$

Teorema de Stokes

Enunciado

Sea M una variedad orientada con borde y sea ω una forma adecuada. Entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

La orientación de M induce la orientación de ∂M .

Ejemplo: cuadro de diálogo

La idea esencial del teorema de Stokes es que «la frontera ∂ y la derivada exterior d se pueden intercambiar». Más concretamente, a modo de truco mnemotécnico podemos emplear la siguiente analogía. Recordemos que, dado un espacio vectorial V con dual V^* , y un operador lineal $A: V \rightarrow V$, el adjunto de A es el operador lineal $A^*: V^* \rightarrow V^*$ dado por

$$\langle \mu, Av \rangle = \langle A^* \mu, v \rangle ,$$

para todo $v \in V$ y para todo $\mu \in V^*$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto canónico de V con V^* . Para nuestra analogía, denotemos la integral de una n -forma $\omega \in \Omega^n(M)$ en una variedad M de dimensión n como sigue:

$$\langle M, \omega \rangle := \int_M \omega .$$

Entonces, podemos recordar el teorema de Stokes como «la frontera ∂ es el operador adjunto de la derivada exterior d »:

$$\langle M, d\omega \rangle = \langle \partial M, \omega \rangle .$$

La información expuesta en este cuadro tan solo es una analogía que pretende ayudar al lector a recordar el teorema de Stokes, resultado fundamental de este libro. Si resulta confuso, este cuadro se puede ignorar sin problemas.

Ejemplo: código QR asociado a un vídeo sobre la demostración del teorema de Stokes



Cerradas, exactas y lema de Poincaré

Cerrada

$$d\omega = 0.$$

Exacta

$$\omega = d\eta.$$

Lema de Poincaré (idea)

Bajo hipótesis locales,
cerrada $\Rightarrow$ exacta.

Exacta $\Rightarrow$ cerrada porque $d \circ d = 0$.

Formas conservativas

Definición

Sea M una variedad orientable. Una 1-forma es ***conservativa*** si $\int_{\gamma} \eta = 0$, para todo camino cerrado γ diferenciable a trozos.

Formas conservativas

Definición

Sea M una variedad orientable. Una 1-forma es ***conservativa*** si $\int_{\gamma} \eta = 0$, para todo camino cerrado γ diferenciable a trozos.

Forma diferencial conservativa $\Leftrightarrow$ exacta.

Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).

Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos visuales: volúmenes, o áreas.

Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos visuales: volúmenes, o áreas.
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.

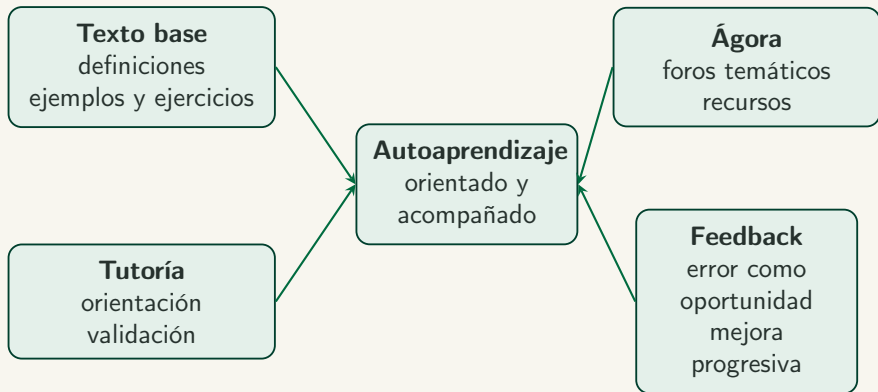
Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos visuales: volúmenes, o áreas.
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.
- ▶ Foros separados para integral en variedades, curvas y superficies.

Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos visuales: volúmenes, o áreas.
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.
- ▶ Foros separados para integral en variedades, curvas y superficies.
- ▶ Ejercicios graduados siguiendo los niveles de tareas especificados en el proyecto docente (Smith y Stein).

Metodología UNED aplicada al tema



Evaluación de la asignatura

Prueba presencial

+

PEC voluntaria: hasta 1 punto

+

Participación significativa en foros

Criterio operativo

La PEC pondera si el examen presencial es al menos 4 y la PEC es al menos 0,5 sobre 1.

Cierre del Tema 3

Formas diferenciales



Integración en variedades



Teorema de Stokes



unidad conceptual del cálculo

¡Muchas gracias!