

# Concurso de acceso a Profesor Titular de Universidad

## Tema 2: Cálculo diferencial

Víctor Manuel Jiménez Morales

Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED

Plaza 215.01 – Geometría y Topología

Departamento de Matemáticas Fundamentales

Campos y Formas – diferenciabilidad

[chardistribution.eu](http://chardistribution.eu)

# Estructura

---

## Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura

# Estructura

---

## Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro

# Estructura

---

## Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido

# Estructura

---

## Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido
  - 3.1 Ideas directrices: *derivar sin coordenadas globales*

# Estructura

---

## Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido
  - 3.1 Ideas directrices: *derivar sin coordenadas globales*
  - 3.2 Tangente, cotangente, campos y formas (visión unificadora)

# Estructura

---

## Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido
  - 3.1 Ideas directrices: *derivar sin coordenadas globales*
  - 3.2 Tangente, cotangente, campos y formas (visión unificadora)
  - 3.3 Resultados estructurales

# Estructura

---

## Estructura y objetivos de la exposición

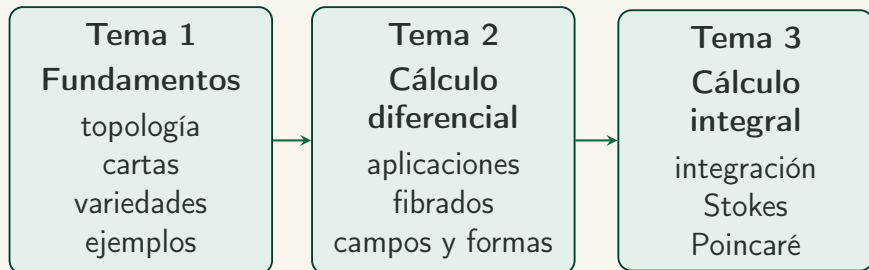
- 1 Lugar del tema en la asignatura
- 2 Hitos, objetivos y criterios de logro
- 3 Contenido
  - 3.1 Ideas directrices: *derivar sin coordenadas globales*
  - 3.2 Tangente, cotangente, campos y formas (visión unificadora)
  - 3.3 Resultados estructurales
- 4 Metodología, evaluación y cierre

Recurso visual que muestra la estructura global del segundo tema



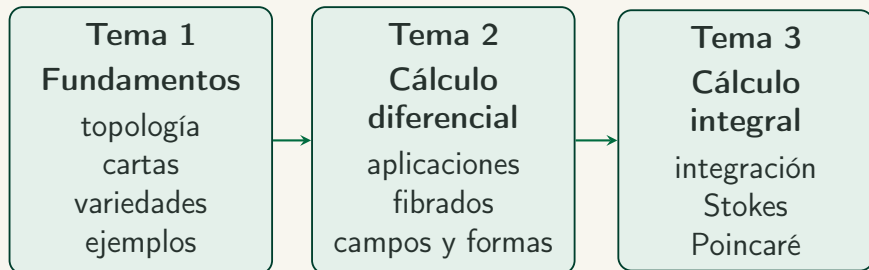
# Lugar del tema en Campos y Formas

---



# Lugar del tema en Campos y Formas

---



En este tema pasamos de construir el espacio ambiente a **derivar** y a construir **campos y formas**.

# Enfoque: de lo general a lo particular

---

Estructura conceptual del proyecto docente

Variedades diferenciables con borde

# Enfoque: de lo general a lo particular

---

Estructura conceptual del proyecto docente

Variedades diferenciables con borde



Análisis diferencial e integral

# Enfoque: de lo general a lo particular

---

Estructura conceptual del proyecto docente

Variedades diferenciables con borde



Análisis diferencial e integral



Curvas y superficies como casos particulares

# Enfoque: de lo general a lo particular

---

Estructura conceptual del proyecto docente

Variedades diferenciables con borde



Análisis diferencial e integral



Curvas y superficies como casos particulares

El esfuerzo abstracto inicial permite obtener después muchas conclusiones de una sola vez.

# Razón matemática del cambio

---

Una construcción general



varios casos particulares

## **Economía conceptual**

Si el lenguaje de variedades está bien construido, el análisis diferencial en curvas, superficies y  $\mathbb{R}^n$  no se estudian como excepciones, sino como ejemplos naturales.

# Algunas razones docentes

---

## Comprensión

Menos  
fragmentación  
conceptual.

# Algunas razones docentes

---

## Comprensión

Menos fragmentación conceptual.

## Conexiones

Mejor enlace con Curvas y superficies y Geometría Diferencial.

# Algunas razones docentes

---

## Comprensión

Menos fragmentación conceptual.

## Conexiones

Mejor enlace con Curvas y superficies y Geometría Diferencial.

## Abstracción

¿Para que sirve generalizar?

# Algunas razones docentes

---

## Comprensión

Menos fragmentación conceptual.

## Conexiones

Mejor enlace con Curvas y superficies y Geometría Diferencial.

## Abstracción

¿Para que sirve generalizar?

La abstracción no se presenta como obstáculo, sino como herramienta de organización.

- ▶ Hitos fundamentales.
- ▶ Objetivos de aprendizaje.
- ▶ Criterios de logro.

# Hitos fundamentales del Tema 2

---

## Hitos fundamentales

- 1 Aplicaciones diferenciables entre variedades

# Hitos fundamentales del Tema 2

---

## Hitos fundamentales

- 1 Aplicaciones diferenciables entre variedades
- 2 Fibrados tangente y cotangente

# Hitos fundamentales del Tema 2

---

## Hitos fundamentales

- 1 Aplicaciones diferenciables entre variedades
- 2 Fibrados tangente y cotangente
- 3 Aplicación inducida y diferencial

# Hitos fundamentales del Tema 2

---

## Hitos fundamentales

- 1 Aplicaciones diferenciables entre variedades
- 2 Fibrados tangente y cotangente
- 3 Aplicación inducida y diferencial
- 4 Campos de vectores tangentes

# Hitos fundamentales del Tema 2

---

## Hitos fundamentales

- 1 Aplicaciones diferenciables entre variedades
- 2 Fibrados tangente y cotangente
- 3 Aplicación inducida y diferencial
- 4 Campos de vectores tangentes
- 5 Formas diferenciales, orientación y volumen

El Tema 2 transforma la estructura construida en el Tema 1 en un lenguaje efectivo de cálculo.

# Objetivos de aprendizaje: aplicaciones diferenciables

---

## 2.1 Aplicaciones diferenciables

10 horas: T-5h, P-5h

- Definir aplicaciones diferenciables entre variedades.

# Objetivos de aprendizaje: aplicaciones diferenciables

---

## 2.1 Aplicaciones diferenciables

**10 horas:** T-5h, P-5h

- ▶ Definir aplicaciones diferenciables entre variedades.
- ▶ Relacionar la definición con el cálculo diferencial de varias variables (conexión con otras asignaturas).

# Objetivos de aprendizaje: aplicaciones diferenciables

---

## 2.1 Aplicaciones diferenciables

**10 horas:** T-5h, P-5h

- ▶ Definir aplicaciones diferenciables entre variedades.
- ▶ Relacionar la definición con el cálculo diferencial de varias variables (conexión con otras asignaturas).
- ▶ Entender el papel de las cartas locales en la diferenciabilidad.

# Objetivos de aprendizaje: aplicaciones diferenciables

---

## 2.1 Aplicaciones diferenciables

**10 horas:** T-5h, P-5h

- ▶ Definir aplicaciones diferenciables entre variedades.
- ▶ Relacionar la definición con el cálculo diferencial de varias variables (conexión con otras asignaturas).
- ▶ Entender el papel de las cartas locales en la diferenciabilidad.
- ▶ Reconocer difeomorfismos y versiones locales de la diferenciabilidad.

# Objetivos de aprendizaje: aplicaciones diferenciables

---

## 2.1 Aplicaciones diferenciables

**10 horas:** T-5h, P-5h

- ▶ Definir aplicaciones diferenciables entre variedades.
- ▶ Relacionar la definición con el cálculo diferencial de varias variables (conexión con otras asignaturas).
- ▶ Entender el papel de las cartas locales en la diferenciabilidad.
- ▶ Reconocer difeomorfismos y versiones locales de la diferenciabilidad.
- ▶ Trabajar ejemplos básicos que conecten con curvas, superficies y abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

# Objetivos de aprendizaje: fibrados tangente y cotangente

---

## 2.2 Fibrados tangente y cotangente

10 horas: T-7h, P-3h

- Construir el espacio tangente a una variedad diferenciable.

# Objetivos de aprendizaje: fibrados tangente y cotangente

---

## 2.2 Fibrados tangente y cotangente

10 horas: T-7h, P-3h

- ▶ Construir el espacio tangente a una variedad diferenciable.
- ▶ Interpretar vectores tangentes como derivaciones en un punto. Interpretación analítica.

# Objetivos de aprendizaje: fibrados tangente y cotangente

---

## 2.2 Fibrados tangente y cotangente

10 horas: T-7h, P-3h

- ▶ Construir el espacio tangente a una variedad diferenciable.
- ▶ Interpretar vectores tangentes como derivaciones en un punto. Interpretación analítica.
- ▶ Introducir derivadas direccionales y derivadas parciales en coordenadas. Nueva interpretación algebraica.

# Objetivos de aprendizaje: fibrados tangente y cotangente

---

## 2.2 Fibrados tangente y cotangente

10 horas: T-7h, P-3h

- ▶ Construir el espacio tangente a una variedad diferenciable.
- ▶ Interpretar vectores tangentes como derivaciones en un punto. Interpretación analítica.
- ▶ Introducir derivadas direccionales y derivadas parciales en coordenadas. Nueva interpretación algebraica.
- ▶ Definir el espacio cotangente y su relación con el dual algebraico.

# Objetivos de aprendizaje: fibrados tangente y cotangente

---

## 2.2 Fibrados tangente y cotangente

10 horas: T-7h, P-3h

- ▶ Construir el espacio tangente a una variedad diferenciable.
- ▶ Interpretar vectores tangentes como derivaciones en un punto. Interpretación analítica.
- ▶ Introducir derivadas direccionales y derivadas parciales en coordenadas. Nueva interpretación algebraica.
- ▶ Definir el espacio cotangente y su relación con el dual algebraico.
- ▶ Comprender las expresiones locales de vectores y covectores.

# Objetivos de aprendizaje: aplicación inducida

---

## 2.3 Aplicación inducida

8 horas: T-5h, P-3h

- Definir la diferencial de una aplicación diferenciable.

# Objetivos de aprendizaje: aplicación inducida

---

## 2.3 Aplicación inducida

8 horas: T-5h, P-3h

- ▶ Definir la diferencial de una aplicación diferenciable.
- ▶ Calcular expresiones locales de la aplicación inducida.

# Objetivos de aprendizaje: aplicación inducida

---

## 2.3 Aplicación inducida

**8 horas:** T-5h, P-3h

- ▶ Definir la diferencial de una aplicación diferenciable.
- ▶ Calcular expresiones locales de la aplicación inducida.
- ▶ Comprender sus propiedades functoriales.

# Objetivos de aprendizaje: aplicación inducida

---

## 2.3 Aplicación inducida

**8 horas:** T-5h, P-3h

- ▶ Definir la diferencial de una aplicación diferenciable.
- ▶ Calcular expresiones locales de la aplicación inducida.
- ▶ Comprender sus propiedades functoriales.
- ▶ Relacionar la diferencial con la matriz jacobiana en coordenadas.

# Objetivos de aprendizaje: aplicación inducida

---

## 2.3 Aplicación inducida

**8 horas:** T-5h, P-3h

- ▶ Definir la diferencial de una aplicación diferenciable.
- ▶ Calcular expresiones locales de la aplicación inducida.
- ▶ Comprender sus propiedades functoriales.
- ▶ Relacionar la diferencial con la matriz jacobiana en coordenadas.
- ▶ Introducir la derivada exterior de una función como primer ejemplo natural.

# Objetivos de aprendizaje: campos de vectores

---

## 2.4 Campos de vectores tangentes

10 horas: T-5h, P-5h

- Definir campos de vectores como secciones del fibrado tangente.

# Objetivos de aprendizaje: campos de vectores

---

## 2.4 Campos de vectores tangentes

10 horas: T-5h, P-5h

- ▶ Definir campos de vectores como secciones del fibrado tangente.
- ▶ Expresar campos de vectores en coordenadas locales.

# Objetivos de aprendizaje: campos de vectores

---

## 2.4 Campos de vectores tangentes

10 horas: T-5h, P-5h

- ▶ Definir campos de vectores como secciones del fibrado tangente.
- ▶ Expresar campos de vectores en coordenadas locales.
- ▶ Comparar definiciones equivalentes de campo de vectores.

# Objetivos de aprendizaje: campos de vectores

---

## 2.4 Campos de vectores tangentes

10 horas: T-5h, P-5h

- ▶ Definir campos de vectores como secciones del fibrado tangente.
- ▶ Expresar campos de vectores en coordenadas locales.
- ▶ Comparar definiciones equivalentes de campo de vectores.
- ▶ Estudiar campos definidos a lo largo de subconjuntos o aplicaciones.

# Objetivos de aprendizaje: campos de vectores

---

## 2.4 Campos de vectores tangentes

10 horas: T-5h, P-5h

- ▶ Definir campos de vectores como secciones del fibrado tangente.
- ▶ Expresar campos de vectores en coordenadas locales.
- ▶ Comparar definiciones equivalentes de campo de vectores.
- ▶ Estudiar campos definidos a lo largo de subconjuntos o aplicaciones.
- ▶ Calcular el *pushforward* de un campo cuando esté definido.

# Objetivos de aprendizaje: formas diferenciales

---

## 2.5–2.6 Formas diferenciales

**10 horas:** T–5h, P–5h

- ▶ 1-formas diferenciales.
- ▶ Formas de grado  $k$ .
- ▶ Producto exterior.
- ▶ Pullback y derivada exterior.

## 2.7 Orientación y volumen

**7 horas:** T–5h, P–2h

- ▶ Orientación.
- ▶ Formas de volumen.
- ▶ Contracción.
- ▶ Formas cerradas y exactas.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Aplicaciones diferenciables y fibrados

- **Comparar** la diferenciabilidad en variedades con la diferenciabilidad en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Aplicaciones diferenciables y fibrados

- ▶ **Comparar** la diferenciabilidad en variedades con la diferenciabilidad en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .
- ▶ **Reconocer** cuándo una aplicación entre variedades es diferenciable usando cartas locales.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Aplicaciones diferenciables y fibrados

- ▶ **Comparar** la diferenciabilidad en variedades con la diferenciabilidad en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .
- ▶ **Reconocer** cuándo una aplicación entre variedades es diferenciable usando cartas locales.
- ▶ **Distinguir** entre espacio tangente, espacio cotangente y sus expresiones en coordenadas.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Aplicaciones diferenciables y fibrados

- ▶ **Comparar** la diferenciabilidad en variedades con la diferenciabilidad en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .
- ▶ **Reconocer** cuándo una aplicación entre variedades es diferenciable usando cartas locales.
- ▶ **Distinguir** entre espacio tangente, espacio cotangente y sus expresiones en coordenadas.
- ▶ **Calcular** vectores tangentes y covectores en ejemplos concretos.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Aplicaciones diferenciables y fibrados

- ▶ **Comparar** la diferenciabilidad en variedades con la diferenciabilidad en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .
- ▶ **Reconocer** cuándo una aplicación entre variedades es diferenciable usando cartas locales.
- ▶ **Distinguir** entre espacio tangente, espacio cotangente y sus expresiones en coordenadas.
- ▶ **Calcular** vectores tangentes y covectores en ejemplos concretos.
- ▶ **Relacionar** la construcción del fibrado tangente con el álgebra lineal previa.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Diferencial, campos y coordenadas

- **Calcular** la diferencial de una aplicación diferenciable.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Diferencial, campos y coordenadas

- ▶ **Calcular** la diferencial de una aplicación diferenciable.
- ▶ **Interpretar** localmente la aplicación inducida mediante matrices jacobianas.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Diferencial, campos y coordenadas

- ▶ **Calcular** la diferencial de una aplicación diferenciable.
- ▶ **Interpretar** localmente la aplicación inducida mediante matrices jacobianas.
- ▶ **Expresar** campos de vectores en coordenadas locales.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Diferencial, campos y coordenadas

- ▶ **Calcular** la diferencial de una aplicación diferenciable.
- ▶ **Interpretar** localmente la aplicación inducida mediante matrices jacobianas.
- ▶ **Expresar** campos de vectores en coordenadas locales.
- ▶ **Identificar** un campo de vectores como una sección del fibrado tangente.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Diferencial, campos y coordenadas

- ▶ **Calcular** la diferencial de una aplicación diferenciable.
- ▶ **Interpretar** localmente la aplicación inducida mediante matrices jacobianas.
- ▶ **Expresar** campos de vectores en coordenadas locales.
- ▶ **Identificar** un campo de vectores como una sección del fibrado tangente.
- ▶ **Calcular** el *pushforward* en ejemplos sencillos y detectar cuándo está bien definido.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Formas diferenciales

- ▶ **Construir** 1-formas y  $k$ -formas en coordenadas.
- ▶ **Calcular** productos exteriores.
- ▶ **Aplicar** pullbacks de formas diferenciales.
- ▶ **Calcular** derivadas exteriores.

## Orientación y volumen

- ▶ **Entender** la orientación natural de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{H}^n$ .
- ▶ **Reconocer** formas de volumen.
- ▶ **Calcular** contracciones.
- ▶ **Distinguir** formas cerradas y exactas.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Síntesis conceptual

- **Conectar** campos de vectores y formas diferenciales con los objetos clásicos de  $\mathbb{R}^3$ .

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Síntesis conceptual

- ▶ **Conectar** campos de vectores y formas diferenciales con los objetos clásicos de  $\mathbb{R}^3$ .
- ▶ **Relacionar** gradiente, rotacional y divergencia con el lenguaje de formas diferenciales.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Síntesis conceptual

- ▶ **Conectar** campos de vectores y formas diferenciales con los objetos clásicos de  $\mathbb{R}^3$ .
- ▶ **Relacionar** gradiente, rotacional y divergencia con el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ **Comprender** que el cálculo diferencial del Tema 2 prepara el cálculo integral del Tema 3.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Síntesis conceptual

- ▶ **Conectar** campos de vectores y formas diferenciales con los objetos clásicos de  $\mathbb{R}^3$ .
- ▶ **Relacionar** gradiente, rotacional y divergencia con el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ **Comprender** que el cálculo diferencial del Tema 2 prepara el cálculo integral del Tema 3.
- ▶ **Usar** ejemplos concretos para interpretar definiciones abstractas.

# Criterios de logro del Tema 2

---

## Síntesis conceptual

- ▶ **Conectar** campos de vectores y formas diferenciales con los objetos clásicos de  $\mathbb{R}^3$ .
- ▶ **Relacionar** gradiente, rotacional y divergencia con el lenguaje de formas diferenciales.
- ▶ **Comprender** que el cálculo diferencial del Tema 2 prepara el cálculo integral del Tema 3.
- ▶ **Usar** ejemplos concretos para interpretar definiciones abstractas.
- ▶ **Detectar** errores habituales de coordenadas, dominios y compatibilidad.

# Diferenciabilidad en variedades

## Definición por cartas

Sean  $M$  y  $N$  variedades,  $f : M \rightarrow N$  y  $p \in M$ . Se dice que  $f$  es diferenciable en  $p$  si existen cartas  $(U, \varphi)$  alrededor de  $p$  y  $(V, \psi)$  alrededor de  $f(p)$  tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

es diferenciable (en el sentido clásico) en un entorno de  $\varphi(p)$ .

## Mensaje

La definición es **intrínseca**: no depende de una carta concreta porque los cambios de carta son suaves.

# Ejemplo: cuadro de diálogo

---

Iniciemos en este punto una reflexión, con un nivel de abstracción mayor, con objeto de proporcionar una intuición sobre la lógica interna subyacente a la definición de *diferenciabilidad*. El lector debe tener en cuenta que la observación que se desarrollará a continuación se debe entender más como una reflexión que como parte del contenido del texto y, aunque resulta conveniente para entender de dónde procede y cuál es la intuición inherente a la definición de diferenciabilidad, no es en absoluto esencial para la comprensión de esta definición. Por lo tanto, el lector puede optar por omitir esta discusión y tomar directamente la definición 2.1.1, si así lo considera oportuno.

El problema a abordar es el siguiente: supongamos que se fija una propiedad  $(P)$ , que está bien definida para funciones  $\bar{F}: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ , y es *relativa a los puntos del dominio*, esto es,  $\bar{F}$  verifica, o no, la propiedad en cada uno de los puntos del dominio por separado ( $\bar{F}$  es continua en un punto  $x \in \mathbb{K}^m$ ,  $\bar{F}$  es derivable en  $x \in \mathbb{K}^m$ , etc.) y nuestro objetivo es generalizar esta propiedad  $(P)$  para funciones  $F: M \rightarrow N$  entre variedades, ¿cómo podríamos proceder?

Antes de abordar la cuestión de una manera rigurosa, afrontemos la pregunta con un enfoque intuitivo. El nexo entre las variedades y los espacios  $\mathbb{K}^m$  viene dado, esencialmente, por las cartas locales. Así, a grandes rasgos, la idea será trasladar esta propiedad de funciones sobre  $\mathbb{K}^n$  a funciones sobre variedades a través de su cartas.

# Local: “*diferenciable coordenada a coordenada*”; análogo análisis

---

$F : M \rightarrow N$  es diferenciable  $\Leftrightarrow$  las funciones

$$F^i = x^i \circ F$$

son diferenciables, para todo  $i = 1, \dots, n$ , donde  $(V, \psi_V = (x^1, \dots, x^n))$  es una carta local arbitraria de  $N$ .

Ejemplo: código QR asociado a un vídeo intuitivo de la definición de aplicación diferenciable, junto con un ejemplo



# Del cálculo clásico al espacio tangente

---

## Pregunta rectora

Si  $M$  no vive globalmente en  $\mathbb{R}^n$ ,  
¿cómo se entiende el **espacio tangente**  
**en un punto?**

# Del cálculo clásico al espacio tangente

---

## Pregunta rectora

Si  $M$  no vive globalmente en  $\mathbb{R}^n$ ,  
¿cómo se entiende el **espacio tangente**  
**en un punto?**

## Respuesta

El espacio de todas las derivadas de todos los caminos en el mismo punto.

# Vectores tangentes como derivaciones

---

## Derivación en un punto $p$

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . Una **derivación en  $p$**  es una aplicación lineal

$$v : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface la regla de Leibniz en  $p$ :

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

# Vectores tangentes como derivaciones

## Derivación en un punto $p$

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . Una **derivación en  $p$**  es una aplicación lineal

$$v : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface la regla de Leibniz en  $p$ :

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

## Espacio tangente

$$T_p M = \text{Der}_p(C^\infty(M), \mathbb{R}).$$

# Interpretación: derivar funciones

---

Vector tangente en  $p$



operador que mide la variación de funciones  
en  $p$

## Lectura geométrica

El objeto primario no es una flecha dibujada en el espacio, sino una forma coherente de asignar a cada función suave su derivada en una dirección.

# Derivadas parciales en coordenadas

---

Sea  $(U, \varphi)$  una carta alrededor de  $p$ , con

$$\varphi = (x^1, \dots, x^n).$$

# Derivadas parciales en coordenadas

---

Sea  $(U, \varphi)$  una carta alrededor de  $p$ , con

$$\varphi = (x^1, \dots, x^n).$$

## Vectores coordenados

Para cada  $i = 1, \dots, n$ , se define

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) = \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i} \right|_{\varphi(p)}.$$

# Derivadas parciales en coordenadas

Sea  $(U, \varphi)$  una carta alrededor de  $p$ , con

$$\varphi = (x^1, \dots, x^n).$$

## Vectores coordenados

Para cada  $i = 1, \dots, n$ , se define

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) = \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i} \right|_{\varphi(p)}.$$

## Base local de $T_p M$

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\} \text{ es una base de } T_p M.$$

# Expresión local de un vector tangente

---

## Coordenadas de un vector

Todo vector  $v \in T_p M$  se escribe de manera única como

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

# Expresión local de un vector tangente

## Coordenadas de un vector

Todo vector  $v \in T_p M$  se escribe de manera única como

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

## Acción sobre funciones

Si  $f \in C^\infty(M)$ , entonces

$$v(f) = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)}.$$

Las coordenadas permiten un cálculo explícito

# Tres maneras de ver el mismo objeto

---

## Visión analítica

Derivaciones en  $p$

$$v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

# Tres maneras de ver el mismo objeto

---

## Visión analítica

### Derivaciones en $p$

$$v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

## Visión algebraica

### Espacio vectorial

La familia,

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}$$

es una base de  $T_p M$ .

# Tres maneras de ver el mismo objeto

## Visión analítica

### Derivaciones en $p$

$$v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

## Visión algebraica

### Espacio vectorial

La familia,

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}$$

es una base de  $T_p M$ .

## Visión geométrica

### Velocidades de curvas

Si  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$   
y  $\gamma(0) = p$ ,

$$v(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \gamma)(t).$$

# Tres maneras de ver el mismo objeto

## Visión analítica

### Derivaciones en $p$

$$v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

## Visión algebraica

### Espacio vectorial

La familia,

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}$$

es una base de  $T_p M$ .

## Visión geométrica

### Velocidades de curvas

Si  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$   
y  $\gamma(0) = p$ ,

$$v(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \gamma)(t).$$

La equivalencia entre las visiones es una de las claves conceptuales del Tema 2.

# El espacio cotangente

---

## Definición

El **espacio cotangente** en  $p$  es el dual del espacio tangente:

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Sus elementos se llaman **covectores** o **1-formas** en  $p$ .

## Base dual

Si

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

es la base coordenada de  $T_p M$ , su base dual es

$$\left\{ dx^1 \Big|_p, \dots, dx^n \Big|_p \right\}.$$

# Emparejamiento tangente–cotangente

## Dualidad

Si

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i \Big|_p,$$

entonces

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v^i.$$

# Emparejamiento tangente–cotangente

## Dualidad

Si

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i \Big|_p,$$

entonces

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v^i.$$

$$T_p M \quad \longleftrightarrow \quad T_p^* M$$

Vectores y covectores son objetos duales: unos derivan funciones, otros evalúan vectores.

# Fibrado tangente y fibrado cotangente

---

## Fibrado tangente

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Agrupar todos los espacios tangentes.

# Fibrado tangente y fibrado cotangente

---

## Fibrado tangente

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Agrupar todos los espacios tangentes.

## Fibrado cotangente

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M.$$

Agrupar todos los espacios cotangentes.

# Fibrado tangente y fibrado cotangente

## Fibrado tangente

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Agrupar todos los espacios tangentes.

## Fibrado cotangente

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M.$$

Agrupar todos los espacios cotangentes.

**Punto a punto**  
 $T_p M, T_p^* M$



**Globalmente**  
 $TM, T^*M$

Este paso permite pasar de vectores en un punto a campos y formas diferenciales.

# Lectura didáctica del bloque 2.2

---

## Obstáculo habitual

Confundir el vector tangente con una flecha externa o con una parametrización concreta.

# Lectura didáctica del bloque 2.2

---

## Obstáculo habitual

Confundir el vector tangente con una flecha externa o con una parametrización concreta.

## Estrategia docente

- Presentar primero la necesidad de derivar sin coordenadas globales.

# Lectura didáctica del bloque 2.2

---

## Obstáculo habitual

Confundir el vector tangente con una flecha externa o con una parametrización concreta.

## Estrategia docente

- ▶ Presentar primero la necesidad de derivar sin coordenadas globales.
- ▶ Dar una definición intrínseca.

# Lectura didáctica del bloque 2.2

---

## Obstáculo habitual

Confundir el vector tangente con una flecha externa o con una parametrización concreta.

## Estrategia docente

- ▶ Presentar primero la necesidad de derivar sin coordenadas globales.
- ▶ Dar una definición intrínseca.
- ▶ Recuperar después la expresión local con derivadas parciales.

# Lectura didáctica del bloque 2.2

---

## Obstáculo habitual

Confundir el vector tangente con una flecha externa o con una parametrización concreta.

## Estrategia docente

- ▶ Presentar primero la necesidad de derivar sin coordenadas globales.
- ▶ Dar una definición intrínseca.
- ▶ Recuperar después la expresión local con derivadas parciales.
- ▶ Mostrar la dualidad tangente–cotangente como puente hacia las formas diferenciales.

# El diferencial $T_p f$

---

## Idea geométrica

$T_p M$  describe **velocidades** en  $p$

$T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  transporta  
velocidades.

## En coordenadas

Si  $f$  se escribe localmente como  $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , entonces  $T_p f$  corresponde a la matriz jacobiana  $DF_{\varphi(p)}$ .

# Campos de vectores

---

Un campo de vectores  $X$  asigna “*diferenciablemente*” a cada  $p \in M$  un vector  $X(p) \in T_pM$ .

# Campos de vectores

---

Un campo de vectores  $X$  asigna “*diferenciabilmente*” a cada  $p \in M$  un vector  $X(p) \in T_pM$ .

## Definición

Un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  es una sección diferenciable  $X : M \rightarrow TM$  de la proyección canónica  $\tau_M$  de  $TM$ .

# Campos de vectores

---

Un campo de vectores  $X$  asigna “*diferenciabilmente*” a cada  $p \in M$  un vector  $X(p) \in T_p M$ .

## Definición

Un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  es una sección diferenciable  $X : M \rightarrow TM$  de la proyección canónica  $\tau_M$  de  $TM$ .

## Teorema

Toda derivación  $\bar{X} : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  induce un campo de vectores, y viceversa.

# Un ejemplo de pregunta: subvariedad inmersa

---

*Dadas una aplicación diferenciable  $F : M \rightarrow N$  y una sección diferenciable  $\sigma$  de  $F$ , ¿tiene  $\sigma(N)$  estructura diferenciable? En caso afirmativo, ¿cómo se relaciona con la estructura de  $M$ ?*

# Un ejemplo de pregunta: subvariedad inmersa

---

*Dadas una aplicación diferenciable  $F : M \rightarrow N$  y una sección diferenciable  $\sigma$  de  $F$ , ¿tiene  $\sigma(N)$  estructura diferenciable? En caso afirmativo, ¿cómo se relaciona con la estructura de  $M$ ?*

Inmersión

# Pushforward

---

Sea  $F : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. El *pushforward* de  $F$  viene dado por la aplicación,

$$F_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \mapsto F_* X \in \mathfrak{X}(N) ,$$

con

$$\{F_* X\}(x) = T_{F^{-1}(x)} F \left( X \left( F^{-1}(x) \right) \right) , \quad \forall x \in N .$$

# Formas diferenciales

---

## 1-forma

Una 1-forma asigna a cada  $p \in M$  un funcional lineal  $\omega_p \in T_p^*M$ .

# Formas diferenciales

---

## 1-forma

Una 1-forma asigna a cada  $p \in M$  un funcional lineal  $\omega_p \in T_p^*M$ .

## $k$ -forma

Una  $k$ -forma es una aplicación alternada multilinear

$$\omega_p : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

# Operadores: pullback y diferencial exterior

---

## Pullback

Dada  $f : M \rightarrow N$ ,

$$f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M).$$

## Diferencial exterior

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M),$$
$$d \circ d = 0.$$

Estos dos operadores estructuran el Tema 3 (integración y Stokes).

# Resultados estructurales del Tema 2 (versión operativa)

---

## Resultados que se usan continuamente

- ▶ (Regla de la cadena)  $T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f$ .
- ▶ (Compatibilidad) El diferencial no depende de la elección de cartas.
- ▶ (Naturaleza)  $d$  conmuta con pullback:  
 $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ .
- ▶  $d \circ d = 0$  (base de cerradas/exactas en Tema 3).

## Coordenadas

Sea  $X$  un campo de vectores y  $\lambda$  una 1-forma sobre  $M$  se escriben de manera única como

$$X = X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$\lambda = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^i$$

# Local

---

## Coordenadas

Sea  $X$  un campo de vectores y  $\lambda$  una 1-forma sobre  $M$  se escriben de manera única como

$$X = X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$\lambda = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^i$$

Entonces,

$$\lambda(X) = X(x^i) \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

# Innovación docente en este tema

---

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).

# Innovación docente en este tema

---

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos prácticos: derivadas, campos, formas, ....

# Innovación docente en este tema

---

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos prácticos: derivadas, campos, formas, ....
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.

# Innovación docente en este tema

---

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos prácticos: derivadas, campos, formas, ....
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.
- ▶ Foros separados para derivabilidad, campos de vectores y formas diferenciales.

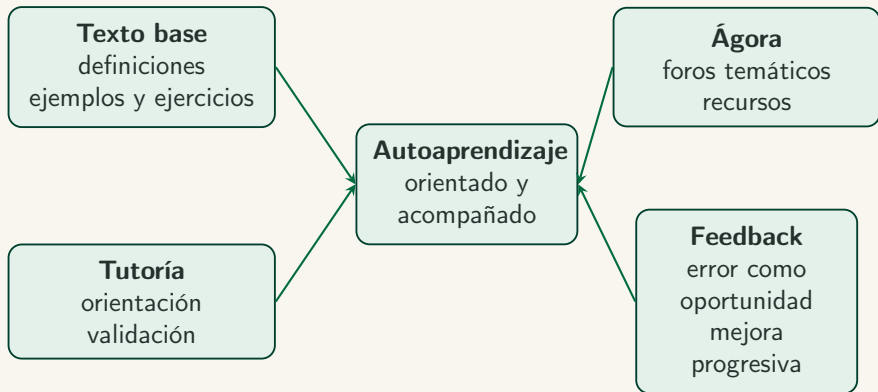
# Innovación docente en este tema

---

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos prácticos: derivadas, campos, formas, ....
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.
- ▶ Foros separados para derivabilidad, campos de vectores y formas diferenciales.
- ▶ Ejercicios graduados siguiendo los niveles de tareas especificados en el proyecto docente (Smith y Stein).

# Metodología UNED aplicada al tema

---



# Evaluación de la asignatura

---

Prueba presencial

+

PEC voluntaria: hasta 1 punto

+

Participación significativa en foros

## Criterio operativo

La PEC pondera si el examen presencial es al menos 4 y la PEC es al menos 0,5 sobre 1.

# Cierre del Tema 2

---

Diferenciabilidad



Tangente y cotangente



Campos y formas



**lenguaje diferencial para Stokes**

¡Muchas gracias!