

Concurso de acceso a Profesor Titular de Universidad

Tema 1: Fundamentos

Víctor Manuel Jiménez Morales

Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED

Plaza 215.01 – Geometría y Topología

Departamento de Matemáticas Fundamentales

Campos y Formas – fundamentos

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Sentido del tema en la asignatura

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Sentido del tema en la asignatura
- 2 Contenido

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Sentido del tema en la asignatura
- 2 Contenido
 - 2.1 Preliminares topológicos imprescindibles

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Sentido del tema en la asignatura
- 2 Contenido
 - 2.1 Preliminares topológicos imprescindibles
 - 2.2 Variedades topológicas y diferenciables

Estructura

Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Sentido del tema en la asignatura
- 2 Contenido
 - 2.1 Preliminares topológicos imprescindibles
 - 2.2 Variedades topológicas y diferenciables
 - 2.3 Ejemplos

Estructura

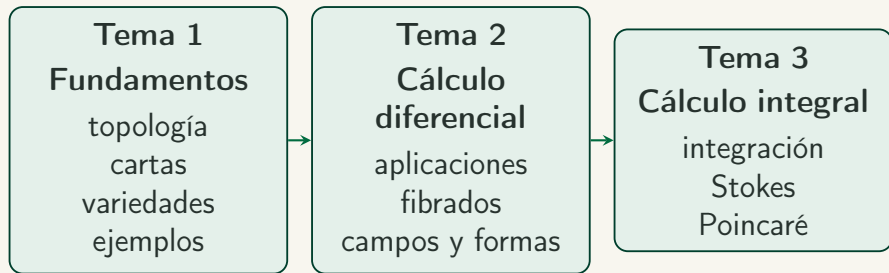
Estructura y objetivos de la exposición

- 1 Sentido del tema en la asignatura
- 2 Contenido
 - 2.1 Preliminares topológicos imprescindibles
 - 2.2 Variedades topológicas y diferenciables
 - 2.3 Ejemplos
- 3 Metodología, evaluación y cierre.

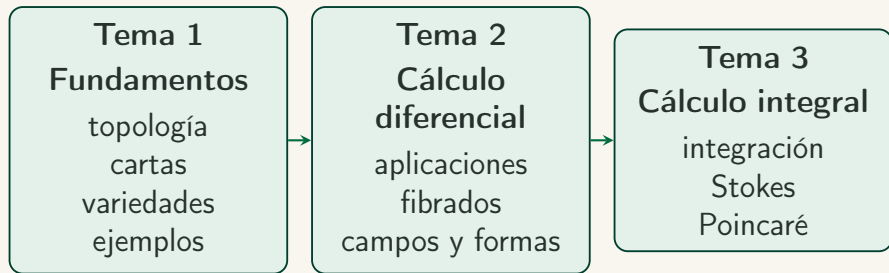
Recurso visual que muestra la estructura global del primer tema



Lugar del tema en Campos y Formas



Lugar del tema en Campos y Formas



El Tema 1 construye el “espacio modelo” donde tendrán sentido implementar el cálculo diferencial e integral.

Una decisión metodológica previa

Enfoque de la asignatura

De lo general a lo concreto.

Una decisión metodológica previa

Enfoque de la asignatura

De lo general a lo concreto. El Tema 1 no es una introducción formal aislada: es el marco conceptual de toda la asignatura.

Enfoque: de lo general a lo particular

Estructura conceptual del proyecto docente

Variedades diferenciables con borde

Enfoque: de lo general a lo particular

Estructura conceptual del proyecto docente

Variedades diferenciables con borde



Análisis diferencial e integral

Enfoque: de lo general a lo particular

Estructura conceptual del proyecto docente

Variedades diferenciables con borde



Análisis diferencial e integral



Curvas y superficies como casos particulares

Enfoque: de lo general a lo particular

Estructura conceptual del proyecto docente

Variedades diferenciables con borde



Análisis diferencial e integral



Curvas y superficies como casos particulares

El esfuerzo abstracto inicial permite obtener después muchas conclusiones de una sola vez.

Razón matemática del cambio

Un resultado general



varios resultados particulares

Economía conceptual

Si el lenguaje de variedades está bien construido,
las curvas y las superficies no se estudian como excepciones,
sino como ejemplos naturales.

Algunas razones docentes

Comprensión

Menos
fragmentación
conceptual.

Algunas razones docentes

Comprensión

Menos
fragmentación
conceptual.

Conexiones

Mejor enlace con
Curvas y superficies
y Geometría
Diferencial.

Algunas razones docentes

Comprensión

Menos fragmentación conceptual.

Conexiones

Mejor enlace con Curvas y superficies y Geometría Diferencial.

Abstracción

¿Para que sirve generalizar?

Algunas razones docentes

Comprensión

Menos fragmentación conceptual.

Conexiones

Mejor enlace con Curvas y superficies y Geometría Diferencial.

Abstracción

¿Para que sirve generalizar?

La abstracción no se presenta como obstáculo, sino como herramienta de organización.

- ▶ Hitos fundamentales.
- ▶ Objetivos de aprendizaje.
- ▶ Criterios de logro.

Hitos fundamentales del Tema 1

Hitos fundamentales

- 1 Estructura de variedad
- 2 Algunas propiedades topológicas
- 3 Ejemplos de variedades diferenciables

Objetivos de aprendizaje: estructura de variedad

1.2 Estructura de variedad

25 horas: T–20h, P–5h

- ▶ Variedad topológica y diferenciable.
- ▶ Carta local, coordenadas, atlas y estructura diferenciable.
- ▶ Puntos interior y frontera.
- ▶ Estructura de los conjuntos interior y frontera.

Objetivos de aprendizaje: propiedades y ejemplos

1.3 Propiedades topológicas

10 horas: T-10h

- ▶ Conexo.
- ▶ Conexo por caminos.
- ▶ Compacidad.

1.4 Ejemplos

10 horas: P-10h

- ▶ Ejemplos del texto.
- ▶ Trabajo práctico sobre variedades diferenciables.

Criterios de logro del Tema 1

Estructura de variedad

- **Diferenciar** entre variedad topológica y variedad diferencial.

Criterios de logro del Tema 1

Estructura de variedad

- ▶ **Diferenciar** entre variedad topológica y variedad diferencial.
- ▶ **Comparar** esta estructura con el espacio euclídeo.

Criterios de logro del Tema 1

Estructura de variedad

- ▶ **Diferenciar** entre variedad topológica y variedad diferencial.
- ▶ **Comparar** esta estructura con el espacio euclídeo.
- ▶ **Entender** la motivación tras la imposición de Hausdorff y segundo contable.

Criterios de logro del Tema 1

Estructura de variedad

- ▶ **Diferenciar** entre variedad topológica y variedad diferencial.
- ▶ **Comparar** esta estructura con el espacio euclídeo.
- ▶ **Entender** la motivación tras la imposición de Hausdorff y segundo contable.
- ▶ **Buscar** ejemplos específicos de carta local, coordenadas, atlas y estructura diferenciable.

Criterios de logro del Tema 1

Estructura de variedad

- ▶ **Diferenciar** entre variedad topológica y variedad diferencial.
- ▶ **Comparar** esta estructura con el espacio euclídeo.
- ▶ **Entender** la motivación tras la imposición de Hausdorff y segundo contable.
- ▶ **Buscar** ejemplos específicos de carta local, coordenadas, atlas y estructura diferenciable.
- ▶ Comprender la **relación** entre estos conceptos.

Criterios de logro del Tema 1

Estructura de variedad

- ▶ **Diferenciar** entre variedad topológica y variedad diferencial.
- ▶ **Comparar** esta estructura con el espacio euclídeo.
- ▶ **Entender** la motivación tras la imposición de Hausdorff y segundo contable.
- ▶ **Buscar** ejemplos específicos de carta local, coordenadas, atlas y estructura diferenciable.
- ▶ Comprender la **relación** entre estos conceptos.
- ▶ **Comparar** los puntos interior y frontera de una variedad con el interior y la frontera topológica.

Criterios de logro del Tema 1

Propiedades topológicas

- ▶ **Relación** entre conexo y conexo por caminos.
- ▶ Comprender las **implicaciones** directas de las propiedades topológicas de las variedades diferenciables.

Ejemplos

- ▶ Comprender en **Profundidad** en detalle los ejemplos.
- ▶ **Encontrar** algún ejemplo más por sí mismo.

Topología: definición operativa

Definición

Una topología en un conjunto X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que:

- ▶ $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- ▶ la intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$;
- ▶ la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Continuidad sin ε - δ

Idea clave

$f : X \longrightarrow Y$ continua



$f^{-1}(U)$ es abierto para todo abierto $U \subseteq Y$.

Esta formulación es la que sobrevive en variedades.

Homeomorfismos

Equivalencia topológica

Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si es continua, biyectiva y f^{-1} es continua.

Homeomorfismos

Equivalencia topológica

Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si es continua, biyectiva y f^{-1} es continua.

homeomorfismo



preserva abiertos, cerrados, interior, clausura
y frontera

Dos condiciones estructurales

Hausdorff

Puntos distintos admiten entornos disjuntos.

Dos condiciones estructurales

Hausdorff

Puntos distintos admiten entornos disjuntos.

Segundo contable

Existe una base numerable de la topología.

Dos condiciones estructurales

Hausdorff

Puntos distintos admiten entornos disjuntos.

Segundo contable

Existe una base numerable de la topología.

Otras propiedades topológicas:

- **Conexidad**

Dos condiciones estructurales

Hausdorff

Puntos distintos admiten entornos disjuntos.

Segundo contable

Existe una base numerable de la topología.

Otras propiedades topológicas:

- ▶ **Conexidad**
- ▶ **Conexidad por caminos**

Dos condiciones estructurales

Hausdorff

Puntos distintos admiten entornos disjuntos.

Segundo contable

Existe una base numerable de la topología.

Otras propiedades topológicas:

- ▶ **Conexidad**
- ▶ **Conexidad por caminos**
- ▶ **Compacidad**; precompacto y localmente compacto.

Dos condiciones estructurales

Hausdorff

Puntos distintos admiten entornos disjuntos.

Segundo contable

Existe una base numerable de la topología.

Otras propiedades topológicas:

- ▶ **Conexidad**
- ▶ **Conexidad por caminos**
- ▶ **Compacidad**; precompacto y localmente compacto.

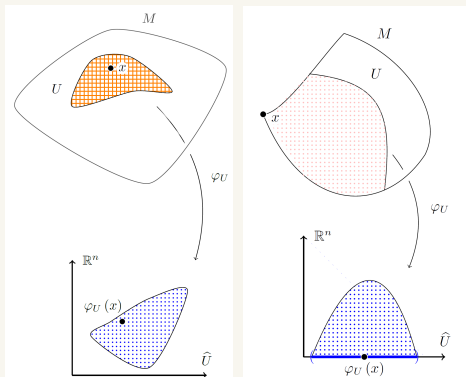
NOTA SOBRE LA EVALUACIÓN Y CONTENIDO

Idea rectora: «*localmente igual a...*»

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n \text{ ó } \mathbb{H}^n$$

Idea rectora: «localmente igual a...»

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n \text{ ó } \mathbb{H}^n$$



Idea rectora: «*localmente igual a...*»;

Cartas locales

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n \text{ ó } \mathbb{H}^n$$

Una carta

$$(U, \varphi), \quad \varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{K}^n$$

U abierto de M , φ homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{K}^n$.

Idea rectora: «*localmente igual a...*»;

Cartas locales

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n \text{ ó } \mathbb{H}^n$$

Una carta

$$(U, \varphi), \quad \varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{K}^n$$

U abierto de M , φ homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{K}^n$.

¿Se podría trabajar únicamente con el espacio euclídeo? ¿Por qué este espacio modelo?

Variedad topológica

Definición

Un espacio topológico M es una variedad topológica de dimensión n si es:

- ▶ Localmente homeomorfo a $\mathbb{K}^n$.

Variedad topológica

Definición

Un espacio topológico M es una variedad topológica de dimensión n si es:

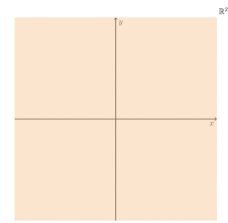
- ▶ Localmente homeomorfo a $\mathbb{K}^n$.
- ▶ Hausdorff.

Variedad topológica

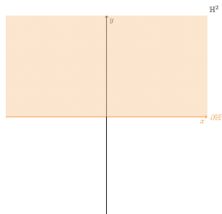
Definición

Un espacio topológico M es una variedad topológica de dimensión n si es:

- ▶ Localmente homeomorfo a $\mathbb{K}^n$.
- ▶ Hausdorff.
- ▶ Segundo contable.



(a) $\mathbb{R}^2$



(b) $\mathbb{H}^2$

Un ejemplo de pregunta: una visión inversa

Sea X un conjunto arbitrario, y $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{K}^n\}_{\alpha \in A}$ una familia de aplicaciones biyectivas definidas sobre subconjuntos de X de tal manera que

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X.$$

¿Qué condiciones deberían darse para que existiera una topología T en X , de tal manera que (X, T) fuera una variedad topológica y cada aplicación φ_α fuera un homeomorfismo?

Un ejemplo de pregunta: una visión inversa

Sea X un conjunto arbitrario, y $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{K}^n\}_{\alpha \in A}$ una familia de aplicaciones biyectivas definidas sobre subconjuntos de X de tal manera que

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X.$$

¿Qué condiciones deberían darse para que existiera una topología T en X , de tal manera que (X, T) fuera una variedad topológica y cada aplicación φ_α fuera un homeomorfismo?

Conexión con variedades diferenciables

Interior, frontera e invariancia topológica

Puntos interior y frontera (vía cartas a $\mathbb{H}^n$)

Sea M una variedad topológica (con borde). Un punto $x \in M$ es:

- **punto interior** ($x \in \overset{\circ}{M}$) si existe una carta local $\varphi_U : U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ con $x \in U$ tal que

$$\varphi_U(x) \in \overset{\circ}{\mathbb{H}}^n.$$

- **punto frontera** ($x \in \partial M$) si existe una carta local $\varphi_U : U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ con $x \in U$ tal que

$$\varphi_U(x) \in \partial \mathbb{H}^n.$$

Invarianza topológica

Cada punto de M es **o bien** interior **o bien** frontera, pero no ambos.

Invarianza topológica

Cada punto de M es **o bien** interior **o bien** frontera, pero no ambos.

¿Qué hay de la diferenciabilidad?

Compatibilidad diferenciable

$$(U, \varphi), (V, \psi) \text{ con } U \cap V \neq \emptyset$$



Cambio de coordenadas:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

Condición

Los cambios de coordenadas deben ser **diferenciables**.

Compatibilidad diferenciable

$$(U, \varphi), (V, \psi) \text{ con } U \cap V \neq \emptyset$$



Cambio de coordenadas:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

Condición

Los cambios de coordenadas deben ser **diferenciables**.

En el tema siguiente se iniciará un diálogo con el lector que justifica la condición de “*diferenciamente compatible*”

Variedad diferenciable

Construcción del concepto

Carta o coordenadas locales

Variedad diferenciable

Construcción del concepto

Carta o coordenadas locales



Atlas diferenciable

Variedad diferenciable

Construcción del concepto

Carta o coordenadas locales



Atlas diferenciable



Estructura diferenciable

Variedad diferenciable

Construcción del concepto

Carta o coordenadas locales



Atlas diferenciable



Estructura diferenciable



Variedad diferenciable

Ejemplo: código QR asociado a un vídeo intuitivo de la definición de variedad diferenciable



Ejemplo: cuadro de diálogo

Notemos que la noción de dimensión invita, de hecho, a una reflexión aún más profunda.

A finales del siglo XIX, Georg Cantor introdujo una idea que resultó profundamente contraintuitiva: distintos objetos geométricos, de tamaños aparentemente dispares, pueden tener la misma *cardinalidad*. La posibilidad de establecer una biyección entre conjuntos geoméricamente muy distintos no surge de manera accidental, sino en un contexto histórico muy concreto: *el nacimiento de la teoría de conjuntos y la necesidad de formalizar la noción de infinito*.

Los primeros resultados relevantes aparecen en los trabajos de G. Cantor durante la década de 1870. En su célebre artículo de 1877, “*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*” [Una contribución a la teoría de conjuntos]^a [Can77], Cantor demuestra un hecho que resultó profundamente perturbador para la intuición geométrica de la época: *los cardinales de $[0, 1]$ y $[0, 1]^2$ coinciden*.

El objetivo de Cantor no era geométrico, sino conjuntista. Su interés principal consistía en comparar el «*tamaño*» de conjuntos infinitos. No obstante, estos resultados inciden directamente en la teoría desarrollada en este texto. De hecho, se pueden percibir como una amenaza a la *noción de dimensión*. Si la recta real y el plano tienen el mismo número de puntos, entonces todo elemento del plano puede ser determinado unívocamente por un valor real y, de este modo, uno se podría hacer la siguiente pregunta:

¿Se rompe la noción misma dimensión dada en el texto?

Parece claro que la respuesta es la siguiente: *la dimensión no es una noción conjuntista, sino topológica*. En particular, *no se puede mejorar más el*

De la definición a la práctica

¿Qué hay que comprobar para decir “ M es diferenciable”?

- ▶ Dar un **atlas**: cartas (U_i, φ_i) con $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- ▶ Comprobar que $\bigcup_i U_i = M$ (las cartas **cubren** M).
- ▶ En los solapes $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, comprobar que los **cambios de coordenadas**

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

son diferenciables.

Proposición: estructura diferenciable inducida por un atlas

Proposición

*Sea M una variedad topológica. Todo atlas diferenciable $\mathcal{A}$ determina una única estructura diferenciable sobre M , llamada **estructura diferenciable inducida por $\mathcal{A}$** . Dos atlas diferenciables $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ inducen la misma estructura diferenciable si y solo si la unión $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas diferenciable.*

Proposición: estructura diferenciable inducida por un atlas

Proposición

*Sea M una variedad topológica. Todo atlas diferenciable $\mathcal{A}$ determina una única estructura diferenciable sobre M , llamada **estructura diferenciable inducida por $\mathcal{A}$** . Dos atlas diferenciables $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ **inducen la misma estructura diferenciable** si y solo si la unión $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas diferenciable.*

En este punto se hace énfasis en la existencia de más de un atlas que dé lugar a la **misma estructura diferenciable** (ejemplos), así como la existencia de atlas que producen **estructuras diferenciables diferentes**.

Proposición: caracterización de puntos interiores

Proposición

*Sea M una variedad diferenciable, y $x \in M$. Existe una carta local φ_U alrededor de x cuyo codominio es un **abierto** de $\mathbb{R}^n$ si y solo si x es un **punto interior** de M .*

Corolario: caracterización de variedades sin borde (por cartas a $\mathbb{R}^n$)

Corolario

*Un espacio topológico M es una variedad con borde vacío de dimensión n si y solo si M es Hausdorff, segundo contable y puede **ser cubierta** por los dominios de una familia de homeomorfismos*

$$\left\{ \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \hat{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \right\}_{\alpha \in A}$$

de tal manera que $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ es diferenciable para todo α y β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Corolario: caracterización de variedades sin borde (por cartas a $\mathbb{R}^n$)

Corolario

*Un espacio topológico M es una variedad con borde vacío de dimensión n si y solo si M es Hausdorff, segundo contable y puede **ser cubierta** por los dominios de una familia de homeomorfismos*

$$\left\{ \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \hat{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \right\}_{\alpha \in A}$$

de tal manera que $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ es diferenciable para todo α y β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Conexión con la asignatura de **Geometría Diferencial**, 4º.

Corolario: invariancia topológica en términos de cartas

Corolario

Sea M una variedad topológica, y $x \in M$. Si existe una carta local $\varphi_U : U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ con $x \in U$ tal que $\varphi_U(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$ (respectivamente, $\varphi_U(x) \in \partial\mathbb{H}^n$), entonces cualquier otra carta $\psi_V : V \rightarrow \hat{V} \subseteq \mathbb{H}^n$ con $x \in V$ satisface $\psi_V(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$ (respectivamente, $\psi_V(x) \in \partial\mathbb{H}^n$).

Proposición: interior abierto y borde cerrado con interior vacío

Proposición

*Sea M una variedad diferenciable. Entonces, $\overset{\circ}{M}$ es un **abierto** de M , y ∂M es un **cerrado con interior vacío**.*

Teorema: estructura del interior y del borde

Teorema

*Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con $\partial M \neq \emptyset$. Entonces, $\overset{\circ}{M}$ es una **variedad sin borde de dimensión n** , y ∂M es una **variedad sin borde de dimensión $n - 1$** .*

Proposición: conexidad local

Proposición

*Toda variedad diferenciable es **localmente conexa** y **localmente conexa por caminos**.*

Teorema: equivalencia entre conexidad y conexidad por caminos

Teorema

*Sea M una variedad diferenciable. Entonces, M es **conexa** si y solo si es conexa por caminos.*

Corolario: conexión por caminos diferenciables a trozos

Corolario

*Sea M una variedad diferenciable. Entonces, M es conexa si y solo si dos puntos cualesquiera pueden **unirse por un camino diferenciable a trozos**.*

Corolario: local compacidad

Corolario

*Toda variedad diferenciable M es **localmente compacta**, es decir, todo punto x de M tiene un entorno compacto.*

Ejemplo guiado: la esfera $\mathbb{S}^2$ (dos cartas)

Definición

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Ejemplo guiado: la esfera $\mathbb{S}^2$ (dos cartas)

Definición

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

- Consideramos los abiertos $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, donde $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$.

Ejemplo guiado: la esfera $\mathbb{S}^2$ (dos cartas)

Definición

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

- ▶ Consideramos los abiertos $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, donde $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$.
- ▶ Definimos cartas por **proyección estereográfica**:

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo guiado: la esfera $\mathbb{S}^2$ (dos cartas)

Definición

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

- ▶ Consideramos los abiertos $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, donde $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$.
- ▶ Definimos cartas por **proyección estereográfica**:

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Dos cartas bastan para cubrir toda la esfera salvo un punto en cada carta.

Ejemplo guiado: el cambio de coordenadas en $\mathbb{S}^2$

Lo esencial del ejemplo

En el solape $U_N \cap U_S$ comprobamos que

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

es diferenciable.

Lectura

- ▶ La esfera **no** admite una carta global.

Lectura

- ▶ La esfera **no** admite una carta global.
- ▶ Sin embargo, la estructura diferenciable existe porque los cambios de coordenadas son suaves.

Lectura

- ▶ La esfera **no** admite una carta global.
- ▶ Sin embargo, la estructura diferenciable existe porque los cambios de coordenadas son suaves.
- ▶ Ejemplo de variedad con más de una estructura diferenciable conocida.

Prototipo de “geometría global construida con información local”.

Obstáculos didácticos

Dificultades observadas y esperables

1 Nivel de abstracción.

Obstáculos didácticos

Dificultades observadas y esperables

- 1 Nivel de abstracción.
- 2 Implicaciones reales de las propiedades topológicas.

Obstáculos didácticos

Dificultades observadas y esperables

- 1 Nivel de abstracción.
- 2 Implicaciones reales de las propiedades topológicas.
- 3 Confundir la variedad con una sola parametrización.

Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).

Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos visuales: esfera, toro, borde y cartas solapadas.

Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos visuales: esfera, toro, borde y cartas solapadas.
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.

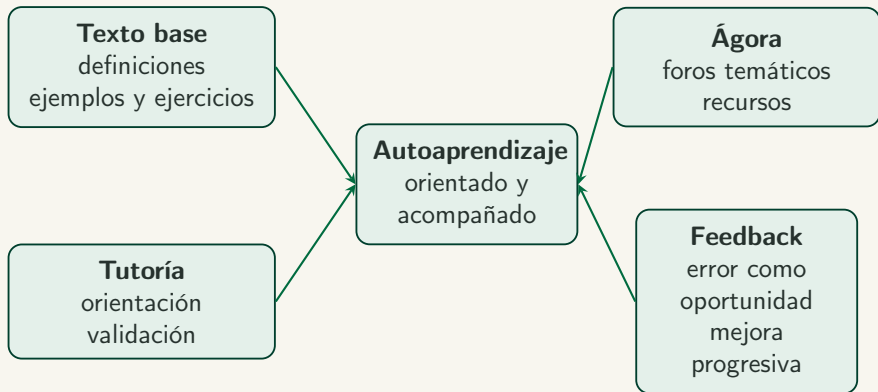
Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos visuales: esfera, toro, borde y cartas solapadas.
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.
- ▶ Foros separados para topología, variedades y ejemplos.

Innovación docente en este tema

- ▶ Recuadros de reflexión (previo a las definiciones formales por ejemplo).
- ▶ Ejemplos visuales: esfera, toro, borde y cartas solapadas.
- ▶ Vídeos cortos mediante QR para lidiar con las dificultades observadas.
- ▶ Foros separados para topología, variedades y ejemplos.
- ▶ Ejercicios graduados siguiendo los niveles de tareas especificados en el proyecto docente (Smith y Stein).

Metodología UNED aplicada al tema



Evaluación de la asignatura

Prueba presencial

+

PEC voluntaria: hasta 1 punto

+

Participación significativa en foros

Criterio operativo

La PEC pondera si el examen presencial es al menos 4 y la PEC es al menos 0,5 sobre 1.

Cierre del Tema 1

Topología



Cartas



Atlas diferenciable



escenario para el cálculo en variedades

¡Muchas gracias!